

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej

Witold Wasilewski
Nr albumu: 1109427

**ALGORYTM MONTE CARLO DO OBLICZEŃ CHIRALNYCH
SIŁ JĄDROWYCH NA MASZYNIE WIELOPROCESOROWEJ**

Praca magisterska
na kierunku Informatyka Stosowana

Promotor pracy:
dr hab. Roman Skibiński
Instytut Fizyki im. M. Smoluchowskiego

Kraków 2015

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

.....
Kraków, dnia

.....
Podpis autora pracy

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

.....
Kraków, dnia

.....
Podpis kierującego pracą

Abstrakt

Stworzono program obliczający elementy macierzowe dla trzyciałowej siły jądrowej typu 2π – *contact* wykorzystujący metodę Monte Carlo. Opisano zasadę działania oraz szczegóły implementacji równoległej. Przeprowadzono weryfikację poprawności przedstawionego algorytmu oraz programu jako całości. Dla wybranych elementów macierzowych przeprowadzono analizę zbieżności algorytmu oraz analizę porównawczą względem wyników uzyskanych przy pomocy kwadartur Gaussa. Przedstawiono dwie metody badania zmienności funkcji, opisującej badaną siłę, względem zmiennych kątowych oraz wartości pędów. Opisano zalety, wady oraz potencjalne kierunki rozwoju dla przedstawionego algorytmu.

Abstract

Monte Carlo algorithm for calculating matrix elements of the three-nucleon chiral force of 2π – *contact* type is presented. Description of algorithm's principles, details on parallel implementation as well as code correctness verification tests are given. Analysis of convergence for chosen matrix elements and comparison against results obtained by Gauss quadrature is discussed. I also present two tests of dependence of studied function on momentum and angular variables. Finally, pros, cons and potential improvements are discussed.

Spis treści

1. Wprowadzenie	7
1.1. Motywacja	7
1.2. Zawartość pracy	7
2. Metodologia obliczeń	8
2.1. Podstawy matematyczne	8
2.1.1. Wprowadzenie do całkowania metodą Monte Carlo	8
2.1.2. Zbieżność metody Monte Carlo	8
2.1.3. Prawa wielkich liczb	8
2.1.4. Opis stanu układu 2 i 3 nukleonów	9
2.2. Środowisko uruchomieniowe	9
2.2.1. Generator liczb pseudolosowych	10
2.3. Opis programu	10
2.3.1. Weryfikacja poprawności programu	12
2.3.2. Czasy wykonania	14
3. Problem wprowadzający oraz testy główne	15
3.1. Problem wprowadzający	15
3.1.1. Funkcja testowa	15
3.1.2. Metoda Monte Carlo	15
3.2. Testy główne	15
3.2.1. Zbieżność wyników	18
3.2.2. Porównanie do wyników referencyjnych	19
4. Badanie zmienności funkcji	23
4.1. Zbieżność w zależności od zmiennych kątowych	23
4.2. Zbieżność w zależności od pędu	24
5. Podsumowanie	31
A. Dodatek	34

1. Wprowadzenie

1.1. Motywacja

Skuteczny opis oddziaływań jądrowych stanowi wyzwanie zarówno z punktu widzenia teoretycznego jak i praktycznego. Coraz bardziej złożone wyniki badań teoretycznych wyrażające strukturę sił jądrowych przestają być dostępne dla rozważań analitycznych. Znaczenia nabierają masowe obliczenia z wykorzystaniem maszyn wieloprocesorowych, które umożliwiają uzyskanie rozwiązań o wysokim stopniu precyzji w skończonym, preferowanym najkrótszym czasie. Niestety wielowymiarowość używanych funkcji, ich zmienność oraz stopień komplikacji wpływają na wydłużenie czasu obliczeń oraz stawiają w nowym świetle problem ekonomicznego zużycia zasobów obliczeniowych.

Modele sił jądrowych testuje się prowadząc obliczenia reakcji jądrowych i struktury jąder atomowych. Szczególnie użyteczne są tu procesy z trzema nukleonami, gdyż z jednej strony możliwe jest dla nich wykonanie dokładnych obliczeń, a z drugiej strony już w tych procesach ujawnia się cała złożoność sił jądrowych. Jednym z używanych formalizmów do obliczeń procesów trzyciałowych jest formalizm równań Fadeeva [1]. Równania te można rozwiązywać w przestrzeni pędowej używając rozkładu na fale cząstkowe [2, 3].

Obliczanie elementów macierzowych sił jądrowych w bazie fal cząstkowych można sprowadzić do obliczenia wielowymiarowej całki skończonej [4]. Większość obecnie stosowanych metod całkowania numerycznego zakłada stałą siatkę punktów [5]. Powoduje to przewidywalny czas obliczeń, jednak wiąże się z szybkim wzrostem wymagań sprzętowych oraz czasowych wraz ze zwiększaniem ilości punktów całkowania. Zasadnicze wydaje się poszukiwanie bardziej efektywnych metod obliczenia całki. Jedną z nich jest metoda Monte Carlo, która opiera się na losowym doborze punktów całkowania i traktowania szukanej wartości całki jako odpowiedniej wartości oczekiwanej. W niniejszej pracy zostanie przedstawiony algorytm obliczania macierzy sił chiralnych metodą Monte Carlo wraz z analizą porównawczą w stosunku do wyników uzyskanych kwadraturami Gaussa [6, 7, 8].

1.2. Zawartość pracy

Praca składa się z pięciu rozdziałów, podsumowania, dodatku oraz bibliografii. Rozdział pierwszy stanowi wprowadzenie. Rozdział drugi opisuje podstawy teoretyczne metody Monte Carlo, metodologię obliczeń, algorytm oraz strukturę programu. W rozdziale trzecim zostały przedstawione wyniki uzyskane metodą Monte Carlo dla problemu wprowadzającego. Ponadto rozdział trzeci zawiera wyniki testów głównych, które pozwoliły ocenić przydatność całkowania Monte Carlo dla obliczania elementów macierzowych dla siły $2\pi - contact$. Rozdział czwarty zawiera opis dwóch metod badania charakterystyki zbieżności obliczeń poprzez analizę zmienności funkcji. Rozdział piąty jest podsumowaniem otrzymanych rezultatów. Dodatek zawiera m.in. komplet wyników liczbowych otrzymanych podczas przeprowadzonych obliczeń.

2. Metodologia obliczeń

2.1. Podstawy matematyczne

2.1.1. Wprowadzenie do całkowania metodą Monte Carlo

Zadanie obliczenia całki ograniczonej można zdefiniować jako $I = \int_{\Omega} f(\bar{x})d\bar{x}$, gdzie $\Omega \subset R^n$, a \bar{x} jest n-wymiarową zmienną. Objętością przestrzeni nazywamy całkę $V = \int_{\Omega} d\bar{x}$. Podstawowym lub tzw. naiwnym podejściem w metodzie Monte Carlo jest przybliżenie całki poprzez obliczenie średniej wartości funkcji w danej objętości poprzez wylosowanie jednorodnie N n-wymiarowych punktów próbkujących $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_N \in \Omega$. Wartość całki I jest przybliżana wtedy wartością $I^{num} = \frac{V}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{x}_i)$ [9].

2.1.2. Zbieżność metody Monte Carlo

Zgodnie z [10] niepewność obliczania całki metodą Monte Carlo wynosi $\sigma(I) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{V(f)}$, gdzie $V(f)$ - wariancja badanej funkcji, N - rozmiar próby losowej. Zbieżność pod względem zwiększania rozmiaru próby losowej jest stosunkowo wolna, stąd istotne jest stosowanie alternatywnych metod doboru punktów lub algorytmów obliczania całki. Najpopularniejsze metody redukcji wariancji to:

- Losowanie warstwowe (stratified sampling)
- Metoda średniej ważonej (importance sampling)
- Metoda zmiennych kontrolnych (control variates)
- Metoda zmiennych antytetycznych (antithetic variates)
- Metody Monte Carlo oparte o łańcuchy Markowa (Markov chain Monte Carlo) [11]

Pierwsze cztery metody nakładają na badaną funkcję pewne ograniczenia lub wymagają znajomości jej cech. Funkcje wykorzystywane do obliczania elementów macierzowych sił chiralnych są skomplikowane i a priori nieznanne, przez co możliwość wnioskowania na temat ich cech jest utrudniona. Redukuje to przydatność tych metod. Metody oparte o łańcuchy Markowa wykraczają poza zakres tej pracy, w której bazujemy na podstawowym podejściu do obliczania całki I .

2.1.3. Prawa wielkich liczb

Prawa wielkich liczb to seria twierdzeń matematycznych opisujących zależność pomiędzy ilością wykonanych doświadczeń a faktycznym prawdopodobieństwem wystąpienia zdarzenia, którego to doświadczenia dotyczą. Jest to jedna z najistotniejszych baz matematycznych dla metody Monte Carlo. Prawo wielkich liczb (zakładając jednorodny dobór punktów x) można sformułować następująco [10]:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \equiv E(f)$$

Kanał	l	s	j	λ	I	t	T	J
1	0	0	0	2	5	1	1	5
3	1	0	1	1	3	0	1	3
5	1	0	1	3	7	0	1	7
6	0	1	1	2	4	0	1	4

Tablica 2.1: Liczby kwantowe w bazie $|p, q, \alpha\rangle$ dla wybranych kanałów.

Następnie korzystając z Mocnego Prawa Wielkich Liczb Kołmogorowa można przejść do definicji metody Monte Carlo [12]. Należy zwrócić uwagę na fakt, że zachowanie metody Monte Carlo jest zależne zarówno od ilości losowań, ale także od jakości generatora liczb pseudolosowych. Prawo Wielkich Liczb zapewnia „niemal pewną” zbieżność do wartości oczekiwanej dla liczby punktów całkowania dążącej do nieskończoności. Z praktycznego punktu widzenia liczba punktów jest ograniczona poprzez okres zastosowanego generatora liczb losowych oraz dostępny czas obliczeniowy.

2.1.4. Opis stanu układu 2 i 3 nukleonów

Podstawą opisu stanu kilku nukleonów są równania Faddeeva. Równania te rozwiązywane są w bazach stanów cząstkowych $|p, q, \alpha\rangle$ oraz $|p, q, \beta\rangle$ [1], gdzie p to długość pędu względnego nukleonów 2-3, a q to długość pędu pozostałego nukleonu względem środka masy nukleonów 2 i 3. Zbiór liczb kwantowych α oraz β sprzężonych ze sobą w odpowiedniej kolejności stanowi niezbędne uzupełnienie bazy. Baza stanów $|p, q, \alpha\rangle$ odpowiada tzw. sprzężeniu $j - I$, a baza stanów $|p, q, \beta\rangle$ odpowiada tzw. sprzężeniu $L - S$. Wśród liczb tworzących zbiory α i β wyróżniamy te odnoszące się do układu dwóch nukleonów: kręt orbitalny l , spin s , kręt całkowity j , izospin t . Pozostałe dotyczą sprzężenia trzeciego nukleonu z podukładem dwuciałowym, są to: całkowity kręt orbitalny L , całkowity spin S , całkowity izospin T , całkowity kręt J , kręt orbitalny trzeciego nukleonu względem środka masy dwóch pozostałych nukleonów λ [6]. Zachodzące sprzężenia przedstawiają wzory:

$$|p, q, \alpha\rangle \equiv |p, q, (ls)j, (\lambda, \frac{1}{2})I(jI)JM_J; (t\frac{1}{2})TM_T\rangle$$

$$|p, q, \beta\rangle \equiv |p, q, (l\lambda)L, (s, \frac{1}{2})S(LS)JM_J; (t\frac{1}{2})TM_T\rangle$$

gdzie M_J, M_T to rzuty J i T na oś kwantyzacji.

Istnieje prosty związek pomiędzy bazami $|p, q, \alpha\rangle$ oraz $|p, q, \beta\rangle$ pozwalający na transformacje wektorów i elementów macierzowych pomiędzy nimi [1]. Dzięki temu możemy wybrać dogodną bazę do obliczeń numerycznych. W przypadku siły trzeciałowej wygodne jest przygotowanie funkcji podcałkowej w bazie $|p, q, \beta\rangle$.

Praca została oparta o istniejący, a następnie na potrzeby pracy, zmodyfikowany program przeprowadzający obliczenia w bazie stanów cząstkowych $|p, q, \beta\rangle$, następnie dokonujący przejścia do bazy stanów cząstkowych $|p, q, \alpha\rangle$, w której to prezentowane są wyniki końcowe. Zakresy liczb kwantowych wchodzących do bazy stanów cząstkowych stanowią parametry wejściowe programu i wpływają na wielkość zbioru wynikowego. Dla łatwiejszego analizowania danych wynikowych wprowadzono pojęcie kanału, które opisuje jednoznacznie dany zbiór liczb kwantowych. W późniejszych rozdziałach wykorzystywane są 4 wybrane pary kanałów (składające się z kanałów określanych jako wejściowy i wyjściowy). W tabeli 2.1, wypisano wartości liczb kwantowych dla kanałów wchodzących w skład użytych par w bazie $|p, q, \alpha\rangle$.

2.2. Środowisko uruchomieniowe

Wszystkie obliczenia, ze względu na ich stopień komplikacji oraz czasochłonność, zostały wykonane na maszynie wieloprocesorowej (od 4 do 1024 rdzeni). Do komunikacji wykorzystano bibliotekę

OpenMPI¹ w wersji 1.6.5. Do kompilacji plików źródłowych wykorzystano kompilator GCC (gfortran oraz mpif77)². Skrypty pomocnicze wykorzystywane do analizy wyników oraz zadań pobocznych zostały napisane w języku Python 2.7.9³. Wszystkie działania związane z przeprowadzeniem obliczeń, testów oraz zadań pomocniczych zostały wykonane pod systemem operacyjnym Linux.

2.2.1. Generator liczb pseudolosowych

W obliczeniach wykorzystano metodę RANLUX z biblioteki mathlib udostępnionej przez CERN⁴. Jest on powszechnie stosowany w obliczeniach metodą Monte Carlo, gdyż charakteryzuje się dużym okresem (powyżej 10^{166}). Każdy proces posiada własny, niezależny generator. Ziarno generatora jest obliczane na podstawie bieżącego czasu oraz identyfikatora procesu [13]:

$$Z = |(t * 181 * (pid - 83) * 359) \% 104729|$$

gdzie t - ilość sekund od 1970 (timestamp), pid - identyfikator procesu.
Generator posiada pięć poziomów jakości [14, 15]:

- Poziom zerowy pozwala na osiągnięcie najwyższej wydajności, natomiast nie przechodzi standardowych testów dla generatorów liczb losowych. Jest to poziom porównywalny z generatorem RCARRY [16].
- Poziom pierwszy znacznie poprawia charakterystykę generatora, jednakże nie przechodzi bardziej złożonych testów (np. test spektralny).
- Poziom drugi zadowala znane testy, ale z teoretycznego punktu widzenia może produkować słabo skorelowane wartości.
- Poziom trzeci minimalizuje szansę wystąpienia słabych korelacji. Jest to poziom domyślny.
- Poziom czwarty korzysta z wszystkich 24 bitów losowych, ale jest przy tym 5 krotnie wolniejszy od poziomu zerowego.

Jeżeli nie wspomniano inaczej generator został skonfigurowany do używania trzeciego stopnia jakości.

2.3. Opis programu

Program składa się z trzech zasadniczych części: wstępnej, właściwej oraz końcowej. Podział jest ściśle związany ze sposobem całkowania metodą Monte Carlo. Schemat działania programu został przedstawiony na Rysunku 2.1.

Kluczowym elementem działania programu jest pętla oznaczona jako faza właściwa. W pętli obliczana jest wartość funkcji podcałkowej w wybranych punktach. W celu uniknięcia nadmiarowych obliczeń część funkcji niezależna od wybranego punktu zostaje wydzielona do osobnej części programu, a wartości produktów pośrednich są obliczane w fazie wstępnej (operacja powszechnie znana jako Caching [17]). Faza właściwa jest wykonywana wielokrotnie i poddana zrównolegleniu. Po uzyskaniu wyników ze wszystkich maszyn zostają one przetworzone do formy wynikowej i wypisane do standardowego wyjścia.

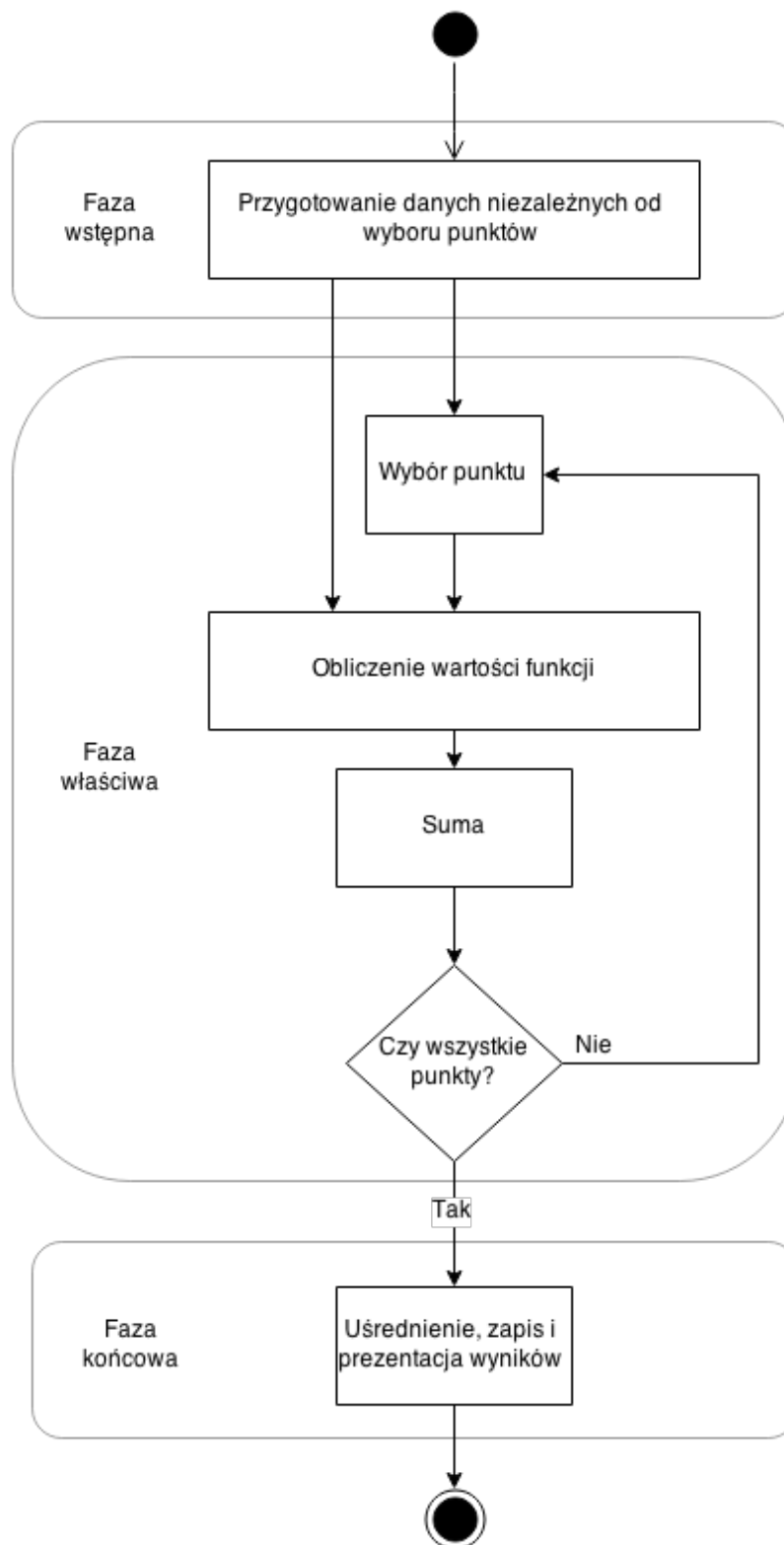
Zrównoleglenie zostało osiągnięte poprzez podział docelowej liczby punktów pomiędzy niezależne procesy (zastosowano protokół MPI). Każdy proces (w tym proces nadzorujący) jest odpowiedzialny za obliczenie danej partii wyników pośrednich. Wielkość partii jest obliczana wprost jako iloraz liczby

¹<http://www.open-mpi.org/>

²<https://gcc.gnu.org/fortran/>

³<https://www.python.org/>

⁴<http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/shortwrupsdir/v115/top.html>



Rysunek 2.1: Schemat działania programu

wszystkich punktów N (parametr ustalony, niezmienny w trakcie działania programu) przez liczbę procesów z zastrzeżeniem dodania reszty z dzielenia do procesu nadzorującego. Procesy są synchronizowane przez barierę założoną przed wejściem do fazy końcowej. Reżim pracy równoległej został pokazany na Rysunku 2.2. Warto zwrócić uwagę na prostotę rozdziału pracy dla rozpatrywanego problemu wynikającej z braku potrzeby synchronizacji stanu pomiędzy procesami (jest to pośredni rezultat zastosowania metody Monte Carlo).

2.3.1. Weryfikacja poprawności programu

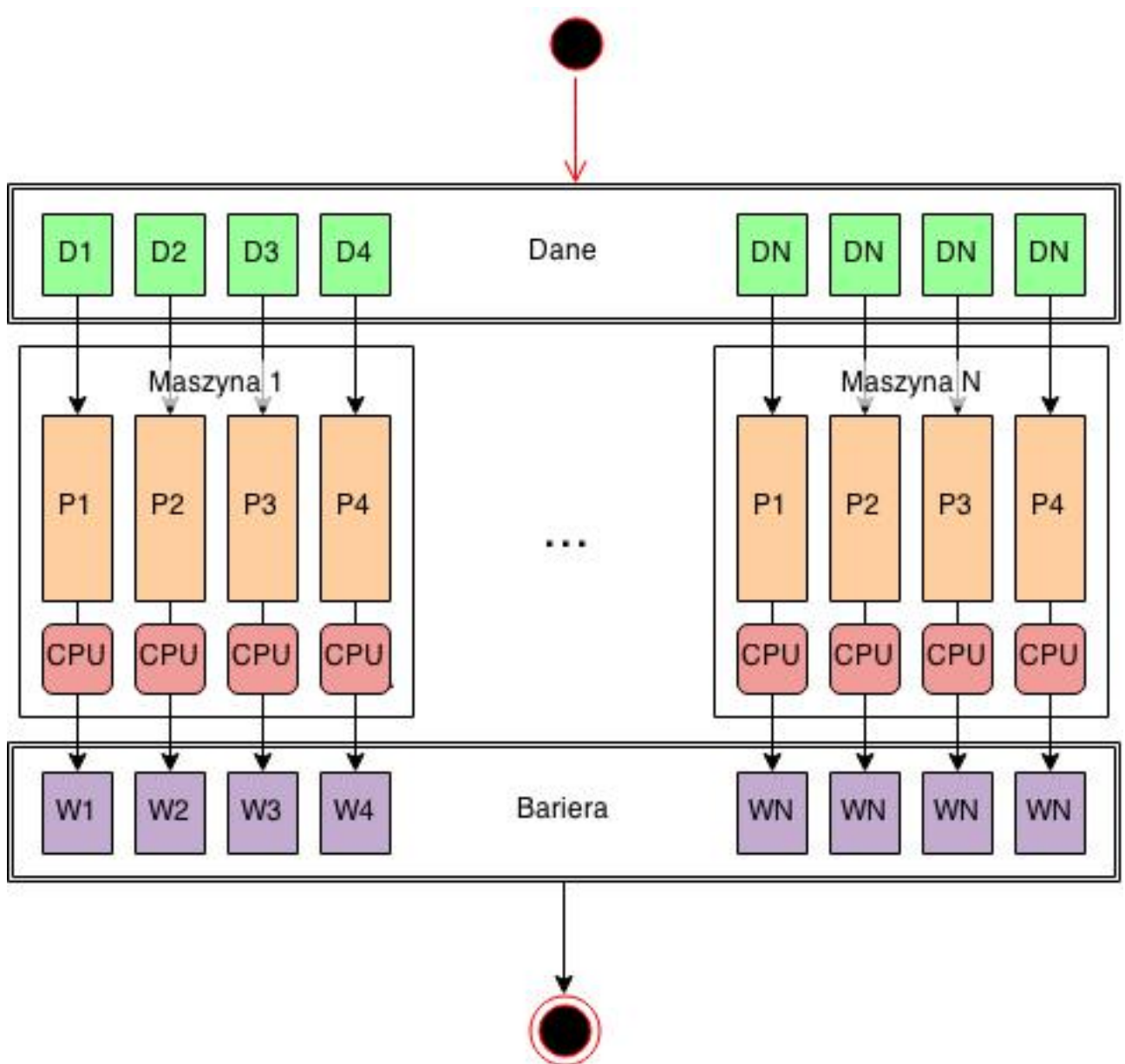
Prezentowany w pracy program został stworzony w oparciu o istniejący program wykorzystujący kwadratury Gaussa. Zmodyfikowana została część kodu źródłowego, naturalnym więc jest postawienie pytania o poprawność działania nowych procedur. Programem pierwotnym określamy oryginalny kod wykorzystujący kwadratury Gaussa - uznajemy go za referencyjny, a jego wyniki za poprawne. Programem wtórnym nazywamy kod stworzony na potrzeby metody Monte Carlo - jest on podmiotem weryfikacji. W obu programach można wydzielić 3 obszary logiczne: całkowanie, obliczenia właściwe wewnętrzne oraz obliczenia właściwe zewnętrzne. Suma procedur określanych jako obliczenia właściwe wewnętrzne i zewnętrzne jest tożsama z blokiem „Obliczanie wartości funkcji” widocznym na Rysunku 2.1.

Poprzez obszar całkowania rozumiemy procedurę związaną z sumacją wyników cząstkowych - poprawność została pokazana w problemie wprowadzającym (podrozdział 3.1), gdzie obszar obliczeń właściwych został bardzo mocno uproszczony i nacisk został położony na weryfikację samej metody Monte Carlo. Obszar obliczeń zewnętrznych stanowią funkcje napisane przez osoby trzecie jako biblioteki lub wygenerowane w sposób automatyczny w innych programach (np. Mathematica). To one obliczają rzeczywiste wartości cząstkowych sił składających się na badaną siłę jądrową. W kodzie źródłowym programu mającym ok. 3200 linii stanowią one 85% całości, w tym 50% całości stanowi sam model matematyczny siły jądrowej. Procedury te uznajemy za poprawne i przetestowane. Obszar obliczeń wewnętrznych obejmuje właściwy trzon programu: wszystkie funkcje, które wykonują główne obliczenia związane z zamierzonym celem programu.

Zmiany dokonane na potrzeby pracy dotyczyły głównie obszaru całkowania, jednakże uzasadnione pozostaje sprawdzenie poprawności działania obszaru właściwego wewnętrznego, który mógł ulec modyfikacji w sposób zamierzony lub niezamierzony. W tym celu przygotowano specjalną wersję programu pierwotnego oraz wtórnego, których kod źródłowy różnił się jedynie dodatkowymi instrukcjami wypisującymi wartości kontrolne na standardowe wyjście. Ponadto generator liczb losowych wykorzystany w programie wtórnym został zmodyfikowany tak, by generował dokładnie te same wartości, których używa program pierwotny. Po uruchomieniu programów z identycznymi parametrami wejściowymi wszystkie wartości testowe zostały zapisane do pliku i następnie porównane. Do testów wybrano zestaw pędów, który w testach głównych posiadał największy błąd względny (podrozdział 3.2.2).

Testy wykazały poprawność programu wtórnego. Dodatkowo, dobra zgodność wyników dla części elementów macierzowych (podrozdział 3.2.2) potwierdza poprawność programu. Program nie zakłada żadnych instrukcji warunkowych, które uzależniają sposób obliczania wyników ze względu na jego postać (np. wartość bezwzględna), stąd niezadowalające rezultaty są efektem charakterystyki samego algorytmu, a nie jego implementacji.

Wyniki końcowe uzyskane w opisanych powyżej warunkach różnią się od siebie mimo identycznych punktów, w których została obliczona wartość funkcji. Zbiór wynikowy uzyskany z programu pierwotnego był bardziej zróżnicowany pod względem zakresu osiąganych wartości. Natomiast zbiór wynikowy uzyskany przez program zmodyfikowany był bardziej jednorodny. Powodem jest różnica w sposobie uśredniania. W przypadku programu pierwotnego jest to średnia ważona (wynikająca z kwadratury Gaussa), która przypisuje punktom całkowania różne wagi. Program wtórny oblicza wartość całki poprzez wyliczenie wartości oczekiwanej, która w zastosowanym podejściu nie różnicuje punktów pod względem ich istotności.



Rysunek 2.2: Schemat pracy równoległej. Oznaczenia: D_x - dane wejściowe, P_x - proces, W_x - dane wyjściowe.

Liczba punktów całkowania (w mln)	Olcha	Zeus (2 klastry)
1	98	-
4	100	-
10	85	-
20	99	454
40	99	452
100	97	465

Tablica 2.2: Tabela przedstawia czas pracy (w sekundach) 1 rdzenia potrzebny do obliczenia wartości funkcji podcałkowej w $N = 10^6$ punktów całkowania w zależności od całkowitej liczby punktów całkowania oraz liczby użytych rdzeni.

2.3.2. Czasy wykonań

W ramach obliczeń przeprowadzonych w rozdziale 3.2 został przeprowadzony pomiar czasu trwania obliczeń. Wykorzystane zostały dwie maszyny:

- „Olcha”, UJ, 8 rdzeni Intel(R) Xeon(R) CPU E5-1620 v2 @ 3.70GHz, 16 GB pamięci podręcznej
- „Zeus”, Cyfronet, klaster Intel Xeon L5640 @ 2.26GHz (12 rdzeni), 16GB pamięci podręcznej

Tabela 2.2 przedstawia średni czas potrzebny pojedynczemu rdzeniowi na obliczenie jednego miliona punktów wchodzących w skład całki. Warto zwrócić uwagę na brak znaczącego wpływu całkowitej liczby punktów na czas wykonania. Nie została przeprowadzona analiza skalowania (wpływu ilości użytych rdzeni na prezentowany czas) - jest to uzasadnione w przypadku zastosowania algorytmu na znacznie większą skalę (tysiący rdzeni). Jednakże sposób podziału pracy oraz niezależność węzłów obliczeniowych dają solidne podstawy do przypuszczenia liniowego skalowania. Warto zauważyć, że czasy dla komputerów „Olcha” oraz „Zeus” nie mogą być porównywane ze sobą ze względu na zastosowania różnych procesorów.

3. Problem wprowadzający oraz testy główne

3.1. Problem wprowadzający

3.1.1. Funkcja testowa

Rozpatrywana będzie w znacznym stopniu uproszczona funkcja wykorzystywana do obliczenia macierzy sił chiralnych [6].

$$V \equiv F = \int d\hat{p}' \int d\hat{q}' \int d\cos(\theta_q) 1$$

Wartość całki jest obliczona dokładnie poprzez rozwinięcie po zmiennych kątowych wektorów \hat{p}' i \hat{q}'

$$\begin{aligned} F &= \int d\hat{p}' \int d\hat{q}' \int d\cos(\theta_q) = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta_{p'}) \sin(\theta_{q'}) \sin(\theta_q) d\theta_{p'} d\phi_{p'} d\theta_{q'} d\phi_{q'} d\theta_q = 32\pi^2 \approx 315.8273 \end{aligned}$$

Jest to wartość referencyjna użyta do opracowania wyników uzyskanych metodą Monte Carlo.

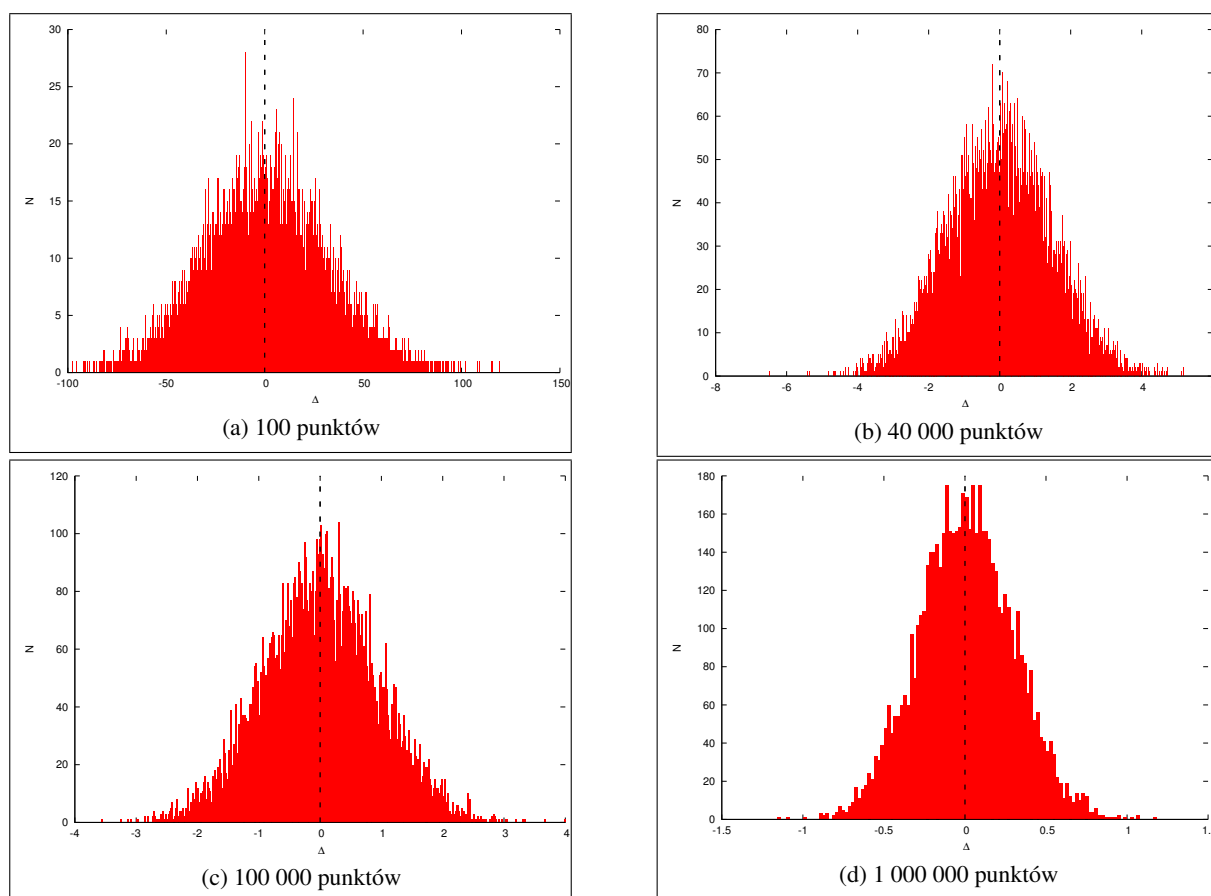
3.1.2. Metoda Monte Carlo

Obliczenie całki testowanej funkcji posłuży jako pierwszy test dokładności metody Monte Carlo. W efekcie uzyskana zostanie minimalna liczba wymaganych punktów losowych dla zadanej dokładności. Całkowaną funkcją jest $f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3)$. Poprzez liczbę losowań (rozmiar próby losowej) rozumiemy liczbę wybranych punktów w przestrzeni Ω , które służą do przybliżenia wartości całki. Obliczenia powtórzono 10000 razy dla każdego rozmiaru próby, a następnie obliczono średnią oraz odchylenie standardowe. Warto zauważyć, że niepewności maleją w przybliżeniu zgodnie z $1/\sqrt{N}$. Poniższe wykresy prezentują wybrane histogramy błędów (zestaw wykresów na Rys. 3.1, 3.2 oraz tabeli 3.1). Wszystkie wykresy zostały załączone w dodatku A. Osiągana zgodność i sposób zachowania niepewności wraz z rosnącym N potwierdzają poprawność procedury całkującej.

3.2. Testy główne

Przed przystąpieniem do właściwych obliczeń zostały przeprowadzone testy dokładności metody Monte Carlo w stosunku to kwadratur Gaussa. Celem doświadczeń było uzyskanie liczby losowań pozwalających na uzyskanie docelowej dokładności. Już pierwsze testy wskazały na potencjalne problemy z dokładnością oraz zbieżnością nowej metody.

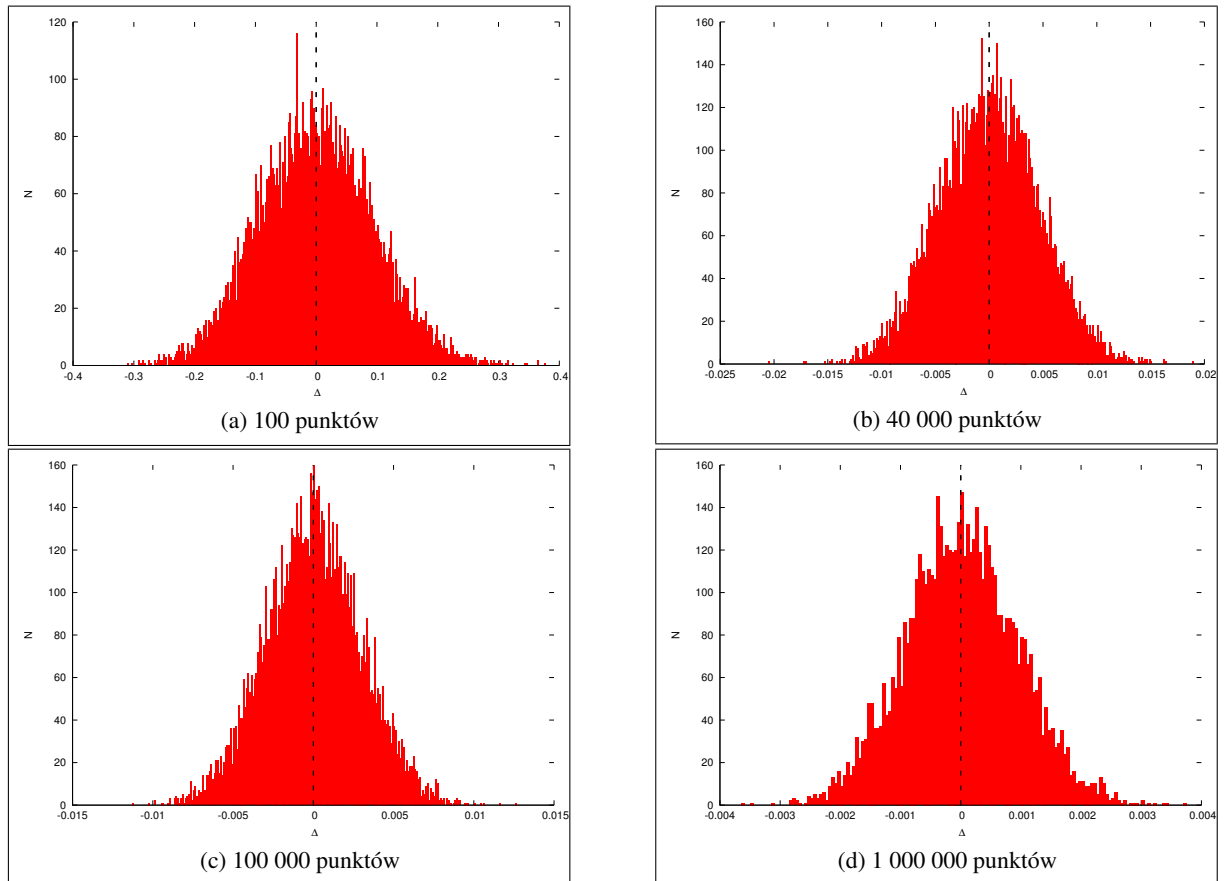
Zadaniem testowym było wyliczenie wybranych elementów macierzowych siły $2\pi - contact$ [18]. Pojedyncza wartość w zbiorze wyników jest etykietowana przez 6 liczb: 4 pędy oraz 2 identyfikatory kanałów. Dane wynikowe uporządkowane są w postaci listy macierzy kanałowych, w której nagłówki



Rysunek 3.1: Wybrane histogramy reprezentujące niepewności bezwzględne $\Delta = F - 32\pi^2$ dla zmiennej wielkości próby. Na osi pionowej liczba wyników z daną niepewnością, na osi poziomej wielkość odchylenia. Linia przerywana oznacza zero. Dla każdej wielkości próby wykonano 10000 powtórzeń obliczeń Δ metodą Monte Carlo.

Liczba punktów N	Odchylenie standardowe σ
100	29.649
500	13.148
1000	9.389
2000	6.607
5000	4.203
10000	2.953
40000	1.469
80000	1.041
100000	0.939
500000	0.418
1000000	0.294

Tablica 3.1: Odchylenia standardowe dane wzorem $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (F_i - 32\pi^2)^2}{N}}$



Rysunek 3.2: Wybrane histogramy reprezentujące niepewności względne $\Delta = \frac{F-32\pi^2}{32\pi^2}$ dla zmiennej wielkości próby. Na osi pionowej liczba wyników z daną niepewnością, na osi poziomej wielkość odchylenia. Linia przerywana oznacza zero. Dla każdej wielkości próby wykonano 10000 powtórzeń obliczeń Δ metodą Monte Carlo.

Nazwa	p'	q'	p	q
A	0.001	0.13200379	0.001	0.13200379
B	1.78463354	1.75810856	2.56536434	1.00868708
C	5.95862482	7.23048796	5.95862482	7.23048796

Tablica 3.2: Wybrane kombinacje pędowe do testów głównych. Wartości pędów wyrażone są w $[fm^{-1}]$.

stanowi wybrana kombinacja pędowa. Ze względu na czasochłonność pełnych obliczeń wybrano spośród wyników referencyjnych 3 testowe kombinacje pędów (wartości podano w tabeli 3.2). Obliczenia przeprowadzono w bazie stanów cząstkowych $|p, q, \beta\rangle$, następnie dokonano przejścia do bazy stanów cząstkowych $|p, q, \alpha\rangle$. Wybór bazy $|p, q, \beta\rangle$ podyktowany jest łatwością obliczenia pochodnej funkcji podcałkowej. Na podstawie zadanych parametrów (maksymalnej wartości całkowitego krętu w podukładzie $2N$ i w układzie $3N$ oraz wartości całkowitego izospinu, patrz również 2.1.4) została sporządzona macierz wyników $W_{34 \times 34}$ dla każdej kombinacji pędów. Rozmiar macierzy podyktowany jest w głównej mierze przyjętymi wartościami granicznymi dla krętu orbitalnego oraz całkowitego krętu dla układu $3N$. Elementy macierzy to liczby rzeczywiste. Zakres przybieranych wartości nie jest ograniczony, natomiast analizując zbiór wyników referencyjnych można wywnioskować, że w większości przypadków są to liczby z zakresu $(-1, 1)$ z silną przewagą liczb bliskich zeru.

Uzyskana macierz stanowi w obliczeniach reakcji jądrowych podstawę do kolejnych etapów, w których dane przechodzą dalsze metamorfozy (m.in. wykonywana jest operacja regularyzacji oraz splotu z funkcjami falowymi) [6]. Jest to powód do wprowadzenia filtrowania danych wynikowych ze względu na ich rangę oraz istotność dla dalszych procedur. W analizie wyników przedstawionej poniżej wprowadzono pojęcie dolnego odcięcia: filtru „większe niż” spełniającego zależność $\forall_{i,j} |W_{i,j}| > \varepsilon$, gdzie ε jest bezwzględną wartością liczbową. Filtr ten:

- eliminuje zera numeryczne (redukcja dużych niepewności względnych dla małych wartości),
- eliminuje wartości, które w sposób marginalny wpływają na wynik dalszych procedur, a więc obserwabli,
- wprowadza możliwość wnioskowania na temat korelacji niepewności σ (3.2.2) oraz niepewności zbieżności wyników Z (3.2.1) z bezwzględną wielkością wyniku.

Testy rozpoczęto od liczby $N = 10^6$ punktów, którą oszacowano w problemie testowym jako zadowalającą. Następnie powtórzono obliczenia dla $N \in \{4 * 10^6, 10^7, 2 * 10^7, 4 * 10^7, 10^8\}$ punktów. Każdą próbę (kombinację liczby losowań oraz danych pędów z tab. 3.2) powtórzono 3 razy.

3.2.1. Zbieżność wyników

Poprzez zbieżność wyników rozumiemy wzajemną bliskość rezultatów w kolejnych (trzech) seriach obliczeń przyjmując te same parametry wejściowe. Różnica w zbiorze wynikowym jest związana z losowym doбором punktów całkowania dla każdego uruchomienia procedury. Brak zbieżności metody, tzn. wyniki uzyskane w kolejnych powtórzeniach znacząco odbiegają od siebie, świadczy o dużej wariancji badanej funkcji oraz nie pozwala na osiągnięcie miarodajnych wyników. Dla danego zestawu pędów oraz wybranej liczby punktów całkowania N możemy obliczyć względną zbieżność wyników jako:

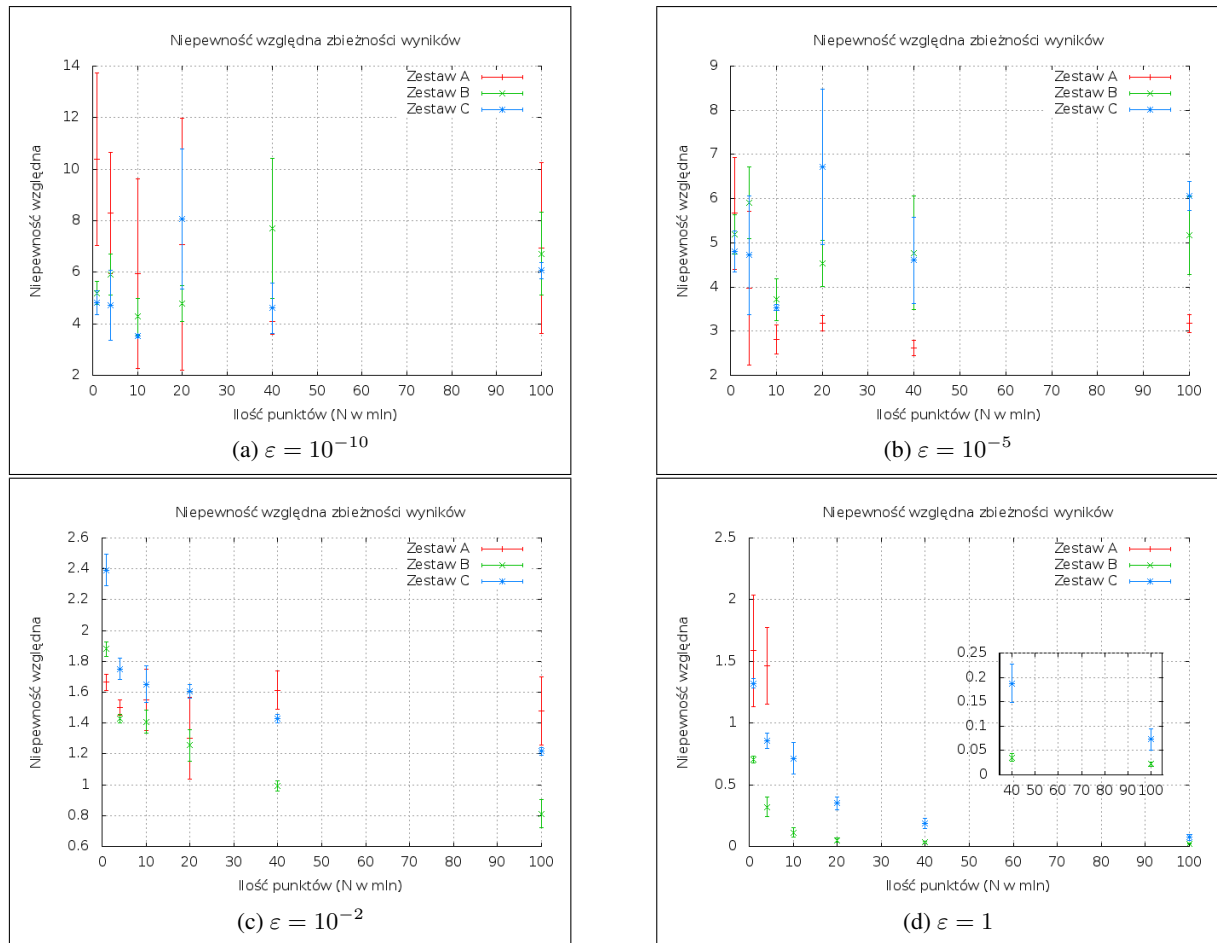
$$Z = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left| \frac{W_{i,j}^k - W_{i,j}^l}{W_{i,j}^1} \right| \text{ dla } k \neq l \text{ oraz } \forall_{i,j} \left| W_{i,j}^k \right|, \left| W_{i,j}^l \right| > \varepsilon$$

gdzie m - wymiar macierzy wyników,

k, l - oznaczenia kolejnych zbiorów wynikowych ($k, l = 1, 2, 3$),

$W_{i,j}^k, W_{i,j}^l$ - to elementy macierzy wyników dla dwóch różnych serii obliczeń,

ε - bezwzględne dolne odcięcie punktów uwzględnianych w obliczeniach.



Rysunek 3.3: Zbieżność metody Monte Carlo dla wybranych pędów w zależności od liczby punktów całkowania. Oznaczenia zestawów A,B,C odnoszą się do tabeli 3.2.

Poniżej zaprezentowano uzyskane zbieżności dla wybranych kombinacji pędów w zależności od liczby punktów całkowania oraz wartości odcięcia (rysunek 3.3). Brak punktu na wykresie dla danej wartości odcięcia oraz liczby losowań oznacza, że zbiór wyników spełniających te kryteria jest pusty. Pełna tabela wyników znajduje się w dodatku A.

Zmiana wartości odcięcia pozwala zbadać jak kształtuje się zbieżność metody Monte Carlo dla małych oraz dużych wartości. Analizując uzyskane wyniki można wnioskować, że zadowalającą dokładność reprezentują jedynie wyniki większe na moduł niż 1.0 reprezentujące 30% część całego zbioru wyników przy dużej próbie losowej rzędu kilkudziesięciu milionów.

3.2.2. Porównanie do wyników referencyjnych

Wynikami referencyjnymi określamy zbiór danych otrzymanych za pomocą kwadratur Gaussa dla 14 punktów całkujących na wymiar. Jako wskaźniki jakości wybrano średnią niepewność względną (wraz z odchyleniem standardowym) oraz maksymalną niepewność względną. Dla danego zestawu pędów oraz wybranej liczby punktów całkowania N możemy zdefiniować średnią niepewność względną jako:

$$\sigma = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left| \frac{W_{i,j}^k - W_{i,j}^R}{W_{i,j}^R} \right| \text{ dla } \forall_{i,j} \left| W_{i,j}^k \right|, \left| W_{i,j}^R \right| > \varepsilon$$

gdzie m - wymiar macierzy wyników (w badanym zbiorze wyników $m = 34$),
 k - oznaczenia badanego zbioru wynikowego (numer serii obliczeń) ($k = 1, 2, 3$),
 $W_{i,j}^k$ - element macierzy porównywanej,

Ilość punktów (w mln)	Średnia niepewność względna	Maksymalna niepewność względna
1	$4.322 * 10^{-2}$	$5.263 * 10^{-2}$
4	$1.614 * 10^{-2}$	$2.201 * 10^{-2}$
10	$1.300 * 10^{-2}$	$2.407 * 10^{-2}$
20	$7.256 * 10^{-3}$	$1.207 * 10^{-2}$
40	$4.803 * 10^{-3}$	$7.243 * 10^{-3}$
100	$1.849 * 10^{-3}$	$2.634 * 10^{-3}$

Tablica 3.3: Niepewności względne dla $W_{1,1}(C)$.

	Zestaw A	Zestaw B	Zestaw C
$\varepsilon = 10^{-10}$	249 (21%)	423 (36%)	516 (47%)
$\varepsilon = 10^{-5}$	30 (3%)	389 (34%)	393 (34%)
$\varepsilon = 10^{-2}$	0	180 (16%)	382 (33%)
$\varepsilon = 1$	0	99 (9%)	339 (29%)

Tablica 3.4: Liczba kombinacji kanałów, dla których element macierzowy spełnia kryterium filtru w zależności od wartości odcięcia. W nawiasach podany ułamek w stosunku do wszystkich kanałów (1156). Oznaczenia zestawów A,B,C odnoszą się do tabeli 3.2.

$W_{i,j}^R$ - element macierzy referencyjnej,

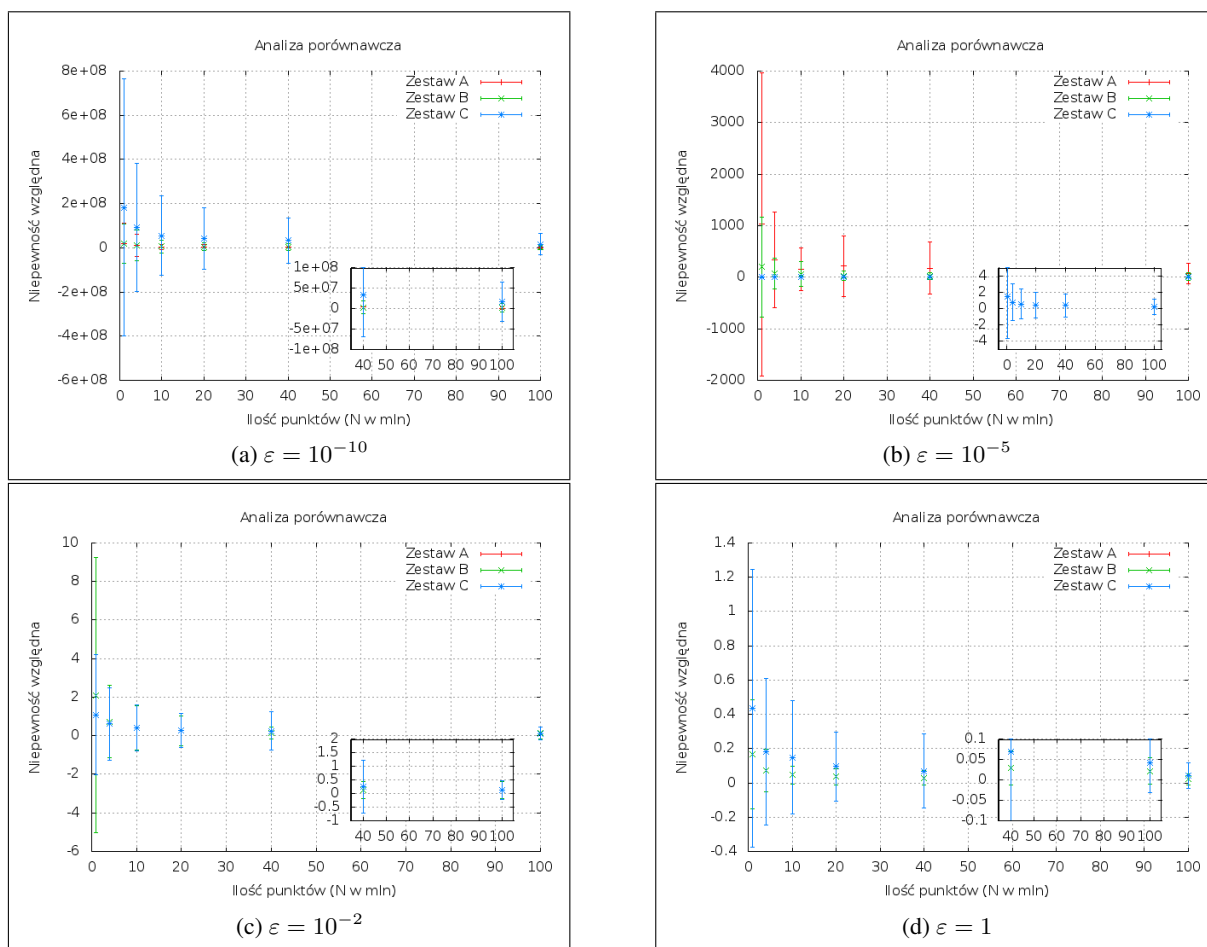
ε - bezwzględne dolne odcięcie punktów uwzględnianych w obliczeniach.

Natomiast maksymalna niepewność względna została zdefiniowana jako:

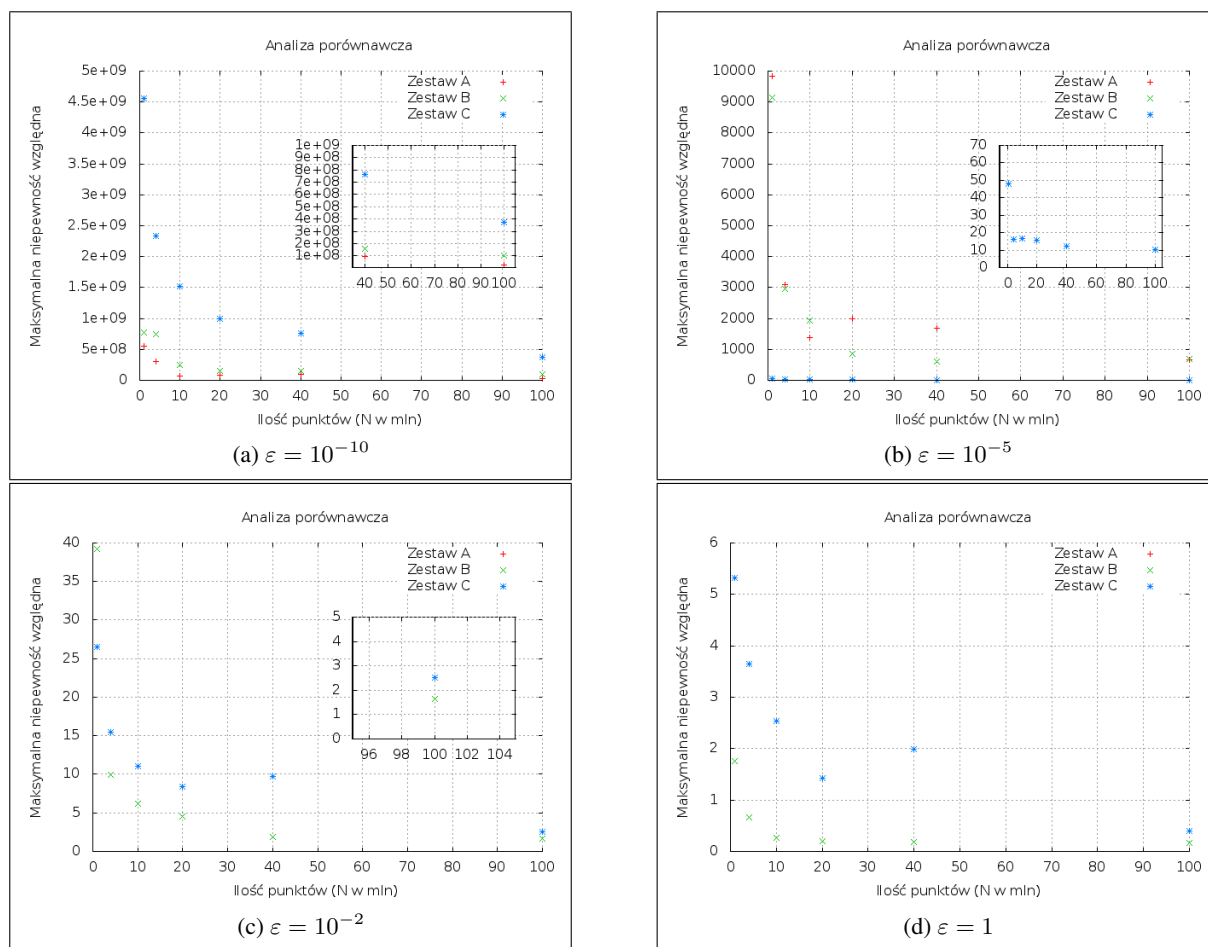
$$\sigma_{max} = \max\left(\left|\frac{W_{i,j}^k - W_{i,j}^R}{W_{i,j}^R}\right|\right) \text{ dla } \forall_{i,j} \left|W_{i,j}^k\right|, \left|W_{i,j}^R\right| > \varepsilon \text{ oraz } i, j \in \{1 \dots m\}, k = 1, 2, 3.$$

Analizę przeprowadzono dla czterech wartości odcięcia ($\varepsilon = 10^{-10}, 10^{-5}, 10^{-2}, 1$) - analogicznie dla analizy zbieżności wyników. Otrzymane wyniki zostały zaprezentowane w postaci wykresów średniej (rysunek 3.4) oraz maksymalnej (rysunek 3.5) niepewności względnej oraz tabeli ilości próbek kwalifikujących się w daną wartość odcięcia (tabela 3.4). Pełen zestaw wyników znajduje się w dodatku A.

Otrzymane rezultaty pokazują, że zadowalające wyniki zostają osiągnięte dla dużej liczby punktów całkowania. Wyjątek stanowią elementy macierzowe, które przybierają większe wartości (powyżej jedności). W przypadku niektórych elementów zadowalająca zgodność osiągnięta jest szybko, np. dla elementu $W_{1,1}(C) = -314.944$ (para kanałów (1,1) dla kombinacji pędowej C). W tabeli 3.3 znajdują się niepewności względne dla elementu $W_{1,1}(C)$. Obrazuje ona, że zadowalająca niepewność względna poniżej 1% jest osiągnięta już dla liczby punktów całkowania $N = 4 * 10^6$. Zaobserwowany trend zmniejszania się niepewności wraz ze zwiększeniem ilości punktów całkowania oraz dobra zgodność dla niektórych elementów macierzowych są mocnymi przesłankami potwierdzającymi zarówno poprawność programu, jak również dużą zmienność badanej funkcji (patrz również rozdział 4, w którym została przeprowadzona stosowna analiza).



Rysunek 3.4: Analiza porównawcza do zbioru wyników referencyjnych - średnia niepewność względna. Oznaczenia zestawów A,B,C odnoszą się do tabeli 3.2.



Rysunek 3.5: Analiza porównawcza do zbioru wyników referencyjnych - maksymalna niepewność względna. Oznaczenia zestawów A,B,C odnoszą się do tabeli 3.2.

4. Badanie zmienności funkcji

Jednym z podstawowych warunków poprawy jakości otrzymywanych wyników jest poznanie specyficznych właściwości danej funkcji. Dzięki dodatkowym informacjom możliwa staje się optymalizacja, dla wybranej metody, stosunku jakości wyników do poniesionych kosztów (mocy oraz czasu obliczeniowego). Należy podkreślić fakt unikalności uzyskanych danych - każda badana funkcja podcałkowa wymaga osobnej serii obliczeń, które pozwolą na indywidualne skorelowanie algorytmu całkującego. Tym niemniej, wobec braku innych informacji o badanej funkcji takie wstępne obliczenia mogą okazać się koniecznym etapem aplikacji tych funkcji do problemów fizycznych. W dwóch kolejnych podrozdziałach zostaną pokazane dwie metody badania zbieżności funkcji (pośrednio wariancji) poprzez dekompozycje przestrzeni całkowania na rozdzielne zbiory według dwóch kryteriów.

4.1. Zbieżność w zależności od zmiennych kątowych

Pierwsze kryterium opiera się na bezpośrednim podziale przestrzeni zmiennych kątowych. Wykonane obliczenia mają na celu ustalenie czy dana zmienna kątowa charakteryzuje się wolniejszą lub szybszą zbieżnością. Tak pozyskana informacja jest podstawą do opracowania strategii rozłożenia punktów całkowania (wolniejsza zbieżność wymaga większej ilości punktów). Ogólna zasada przeprowadzenia obliczeń polega na wykonaniu serii obliczeń, w których w poszczególnych uruchomieniach programu wybrana zmienna kątowa zostaje ustalona na daną wartość i jest niezmienna przez czas trwania obliczeń. Pozostałe zmienne kątowe zmieniają się w pełnym zakresie. Na potrzeby zbadania zbieżności obliczenia zostają powtórzone kilkukrotnie.

W przypadku badanej poniżej siły 2π - *contact* wykonywane jest całkowanie po pięciu zmiennych kątowych, które zostały ustalone w 12 oraz 24 punktach w zależności od ich zakresu (rozkład jednorodny, inkrementacja o $\frac{\pi}{12}$). Obliczenia zostały powtórzone trzykrotnie dla danej ilości punktów całkowania. Zbieżność obliczana jest pomiędzy zbiorami dla pojedynczej ustalonej zmiennej kątowej oraz wybranej ilości punktów całkowania (analogicznie do metody opisanej w podrozdziale 3.2.1).

Poniższe wykresy prezentują kształtowanie się zbieżności dla danych zmiennych losowych w zależności od liczby punktów całkowania (Rysunki 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5). Pełna tabela wyników znajduje się w dodatku A. Wyniki pokazują zróżnicowanie wariancji funkcji w zależności od wartości zmiennych kątowych. Część obszarów całkowania charakteryzuje się niższą wariancją. Dzięki powtórzeniu obliczeń dla odmiennych ilości punktów całkowania możemy zaobserwować, że wraz ze zmniejszaniem liczby punktów całkowania ogólna wariancja wzrasta. Zachowane zostają natomiast relacje pomiędzy punktami. Pozwala to zachować w trakcie oceny zbieżności liczbę punktów całkowania na niskim poziomie - przez co obliczenie charakterystyki funkcji jest mniej pracochłonne.

Analiza została przeprowadzona dla kombinacji pędowej B (tabela 3.2) rozdzielnie dla wszystkich (Rysunek 4.1) oraz pewnej grupy wybranych kanałów (Rysunki 4.2, 4.3, 4.4, 4.5; wartości liczb kwantowych zostały podane w tabeli 2.1), które zostały wytypowane jako mające stosunkowo duży wpływ na obserwabla, m.in. ze względu na zawieranie w sobie deutronowych liczb kwantowych.

Zbieżność obliczeń jest zróżnicowana dla różnych kanałów. Największe różnice zachodzą pomiędzy parami (1,5) (Rys. 4.4) i (6,6) (Rys. 4.5). Można zauważyć, że zbieżność badanych kanałów jest bardziej obiecująca od zbieżności globalnej - niepewności względne dla zbieżności wybranych kanałów są zdecydowanie mniejsze. Jest to szczególnie widoczne dla zmiennej kątowej ϕ_{q1} ; niepewność globalna (Rys.

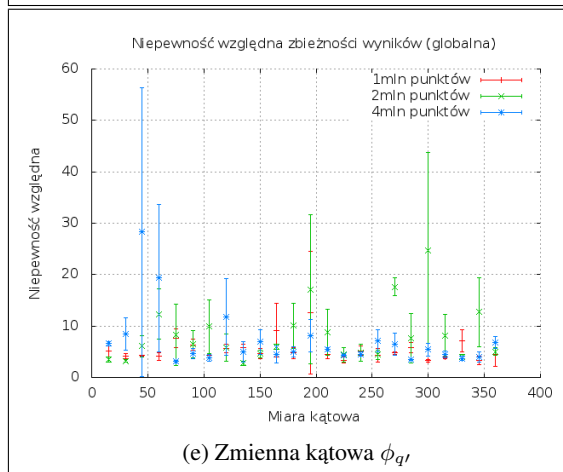
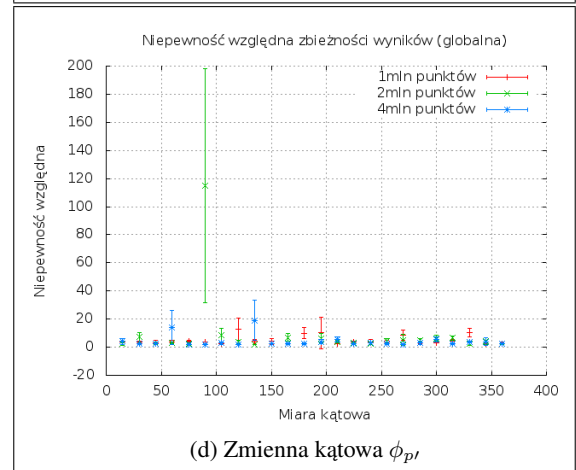
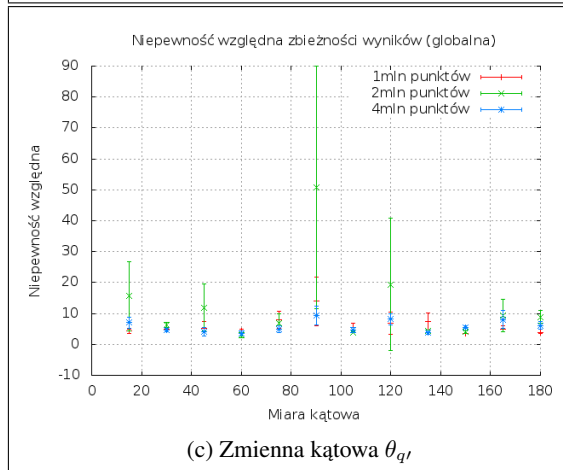
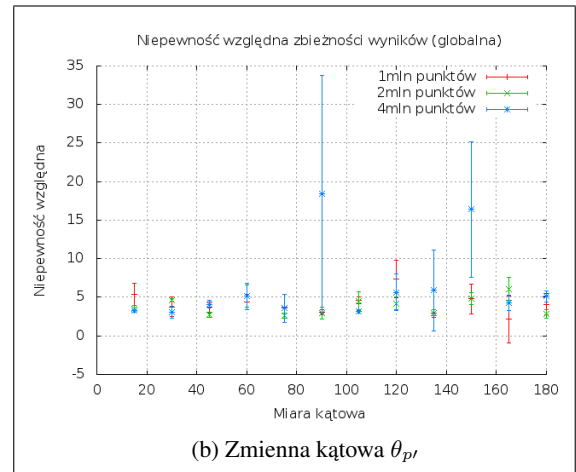
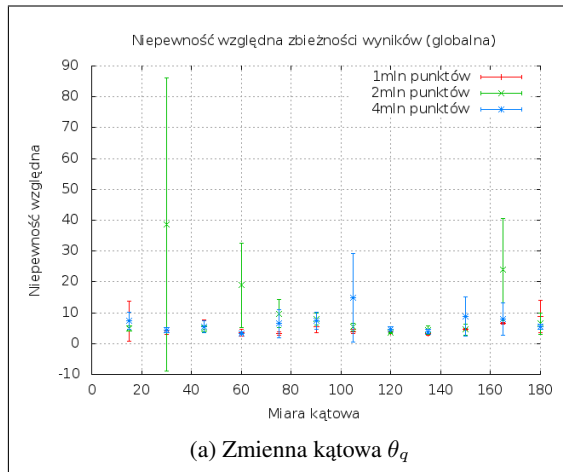
4.1e) jest wielokrotnie wyższa od niepewności dla poszczególnych par kanałów (Rys. 4.2e, 4.3e, 4.4e, 4.5e). Warto również zwrócić uwagę na piki obecne na wykresach - pewne zakresy kątów charakteryzują się gorszą zbieżnością, np. zmienna kątowa $\phi_{q'}$ dla kanału (1,5) (Rys. 4.4e). Miejsca braku zbieżności powinny zostać pokryte gęstszą siatką punktów całkowania.

4.2. Zbieżność w zależności od pędu

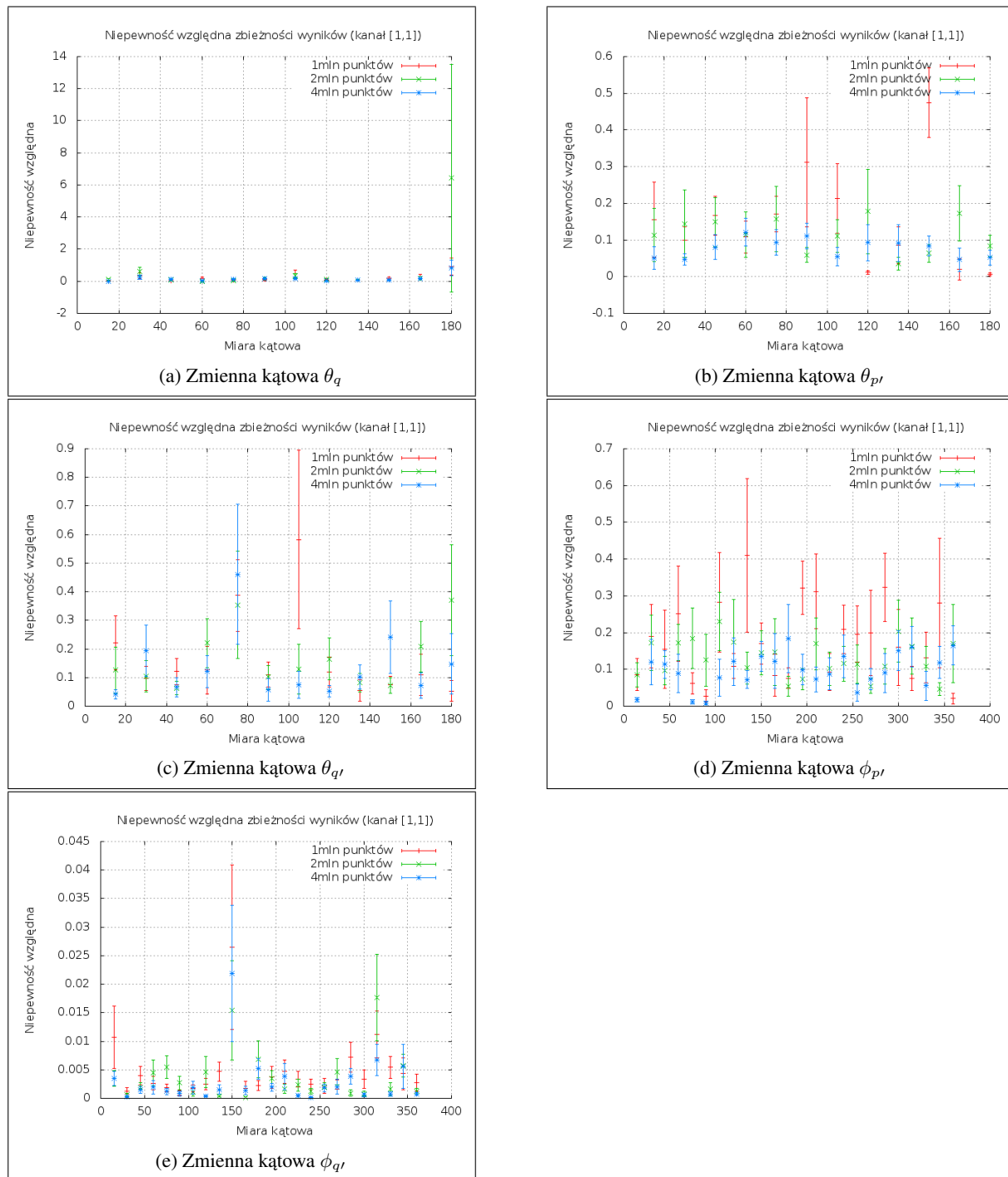
W poprzednim rozdziale została rozważona zbieżność na poziomie zmiennych kątowych, które wchodzi w skład całkowania dla pojedynczej kombinacji pędów. Analogicznego podziału można dokonać poziom wyżej analizując zbieżność w zależności od wartości pędów dla wybranej kombinacji kanałów. Otrzymane informacje mogą posłużyć do znalezienia tych kombinacji pędowych, które wymagają największej wkładu mocy obliczeniowej do uzyskania zadanej dokładności.

Pojedyncza kombinacja pędowa składa się z czwórki liczb (p, p', q, q') , gdzie $p, q, p', q' \geq 0 fm^{-1}$, $p, p' \leq 10 fm^{-1}$, $q, q' \leq 20 fm^{-1}$. W poniższych rozważaniach badana jest zbieżność pędu p' . Analogiczne obliczenia można wykonać dla pozostałych pędów. Trzy pozostałe pędy zostają ustalone (wybrane zostały wartości z zestawu B - tabela 3.2). Zbieżność jest obliczana dla 20 wartości pędu p' , rozpoczynając od wartości $0 fm^{-1}$ do $10 fm^{-1}$ zwiększając o $0.5 fm^{-1}$. Obliczenia zostały powtórzone trzykrotnie dla danej ilości punktów całkowania. Zbieżność obliczana jest pomiędzy zbiorami dla pojedynczej ustalonej wartości pędu oraz wybranej ilości punktów całkowania (analogicznie do metody opisanej w podrozdziale 3.2.1).

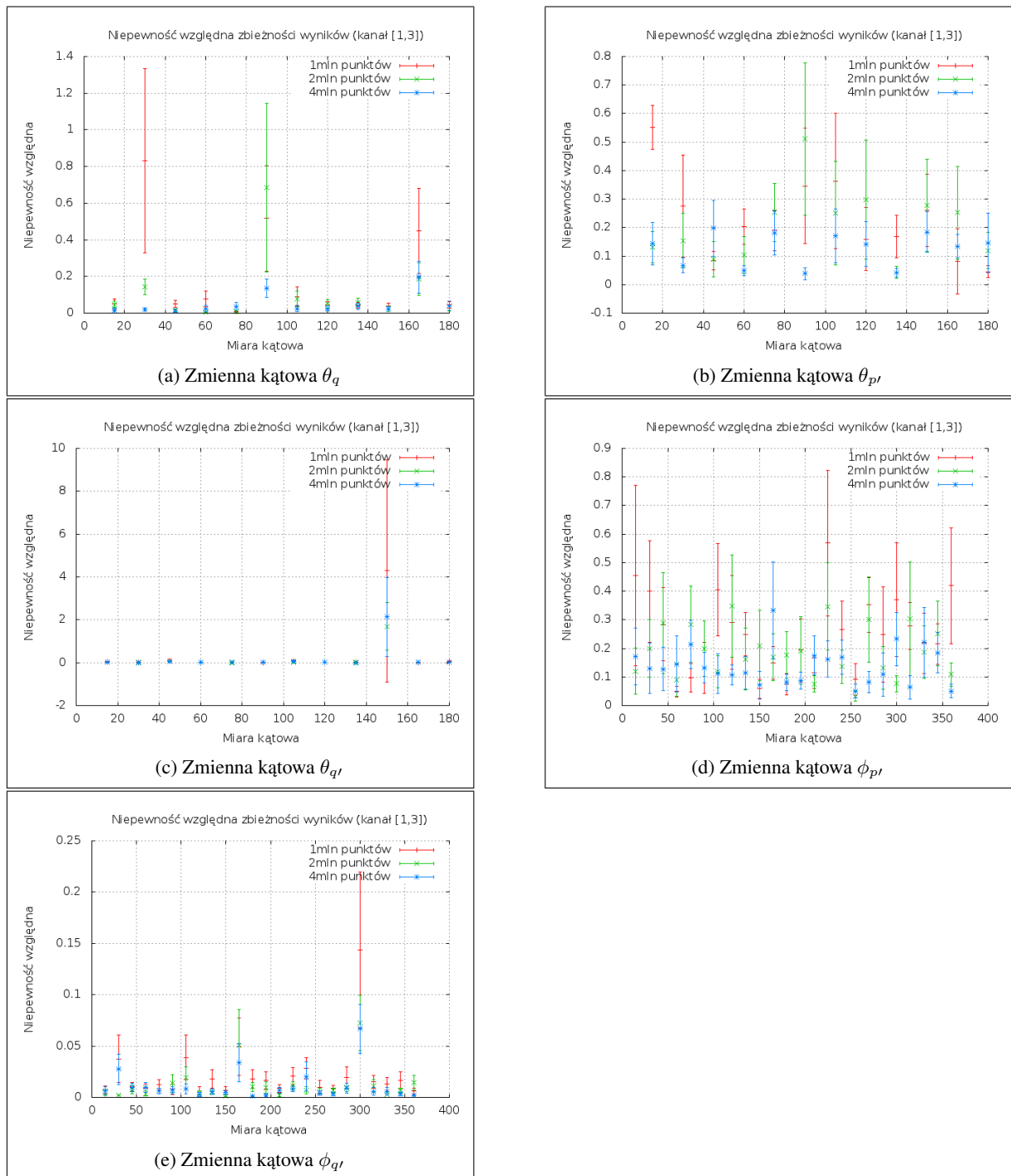
Poniższe wykresy prezentują kształtowanie się zbieżności dla danej wartości pędu p' w zależności od liczby punktów całkowania oraz wartości odcięcia ε (Rysunek 4.6). Pełna tabela wyników znajduje się w dodatku A. Wyniki pokazują zróżnicowanie wariancji funkcji w zależności od wartości pędu, jednakże dla badanego pędu nie jest możliwe wyróżnienie wartości zdecydowanie szybko/wolno zbieżnych. Na rysunku 4.6d możemy zaobserwować trzy nieprzecinające się linie punktów o jednakowych kolorach: wraz ze wzrostem ilości punktów zbieżność zostaje poprawiona, natomiast nie obserwujemy znaczących skoków i odchyżeń, które świadczyłyby o obszarach wolniejszej/szybszej zbieżności.



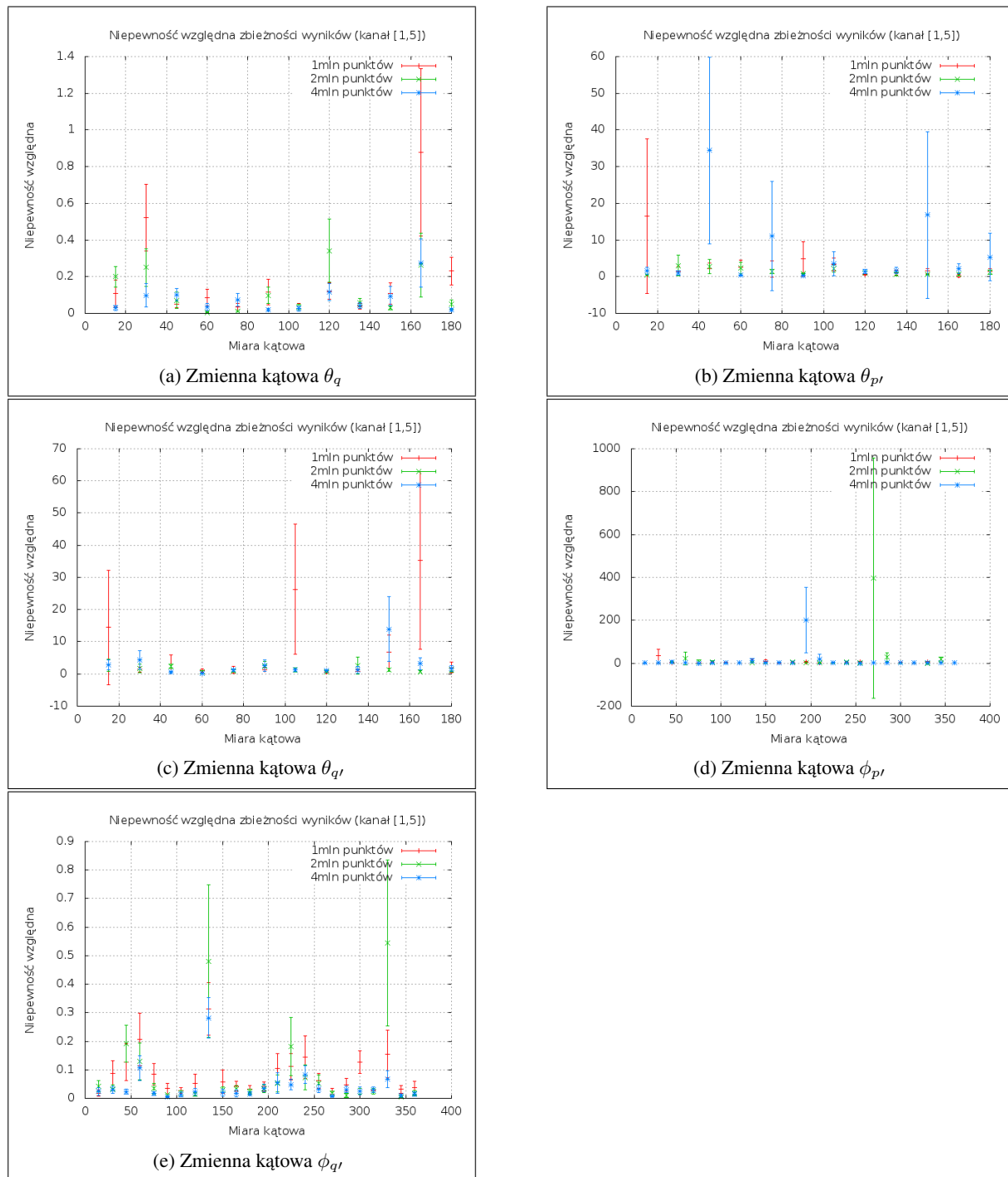
Rysunek 4.1: Zbieżność metody Monte Carlo w zależności od zmiennych kątowych dla siły 2π – *contact* dla wszystkich kanałów (zbieżność globalna).



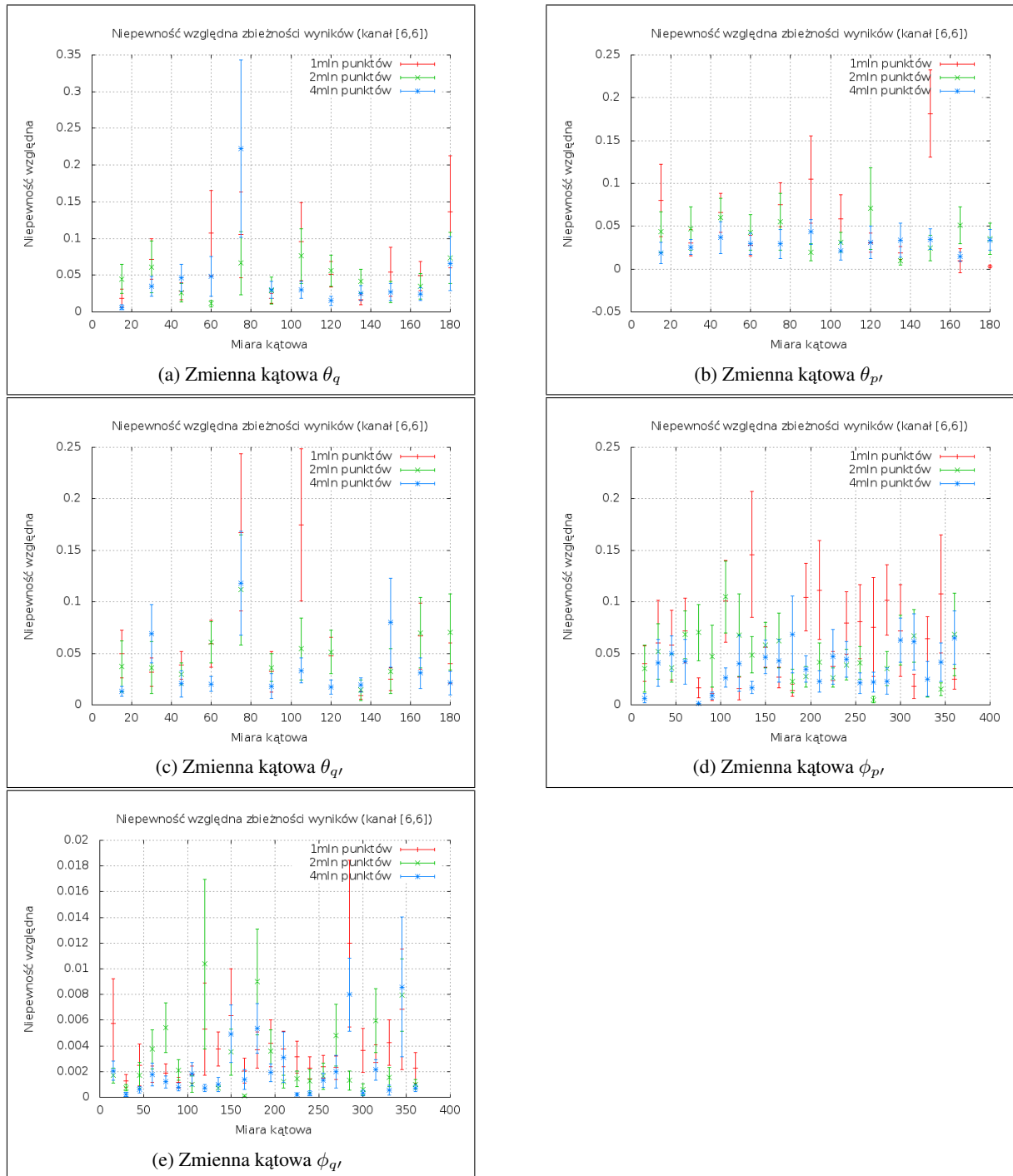
Rysunek 4.2: Zbieżność metody Monte Carlo w zależności od zmiennych kątowych dla siły 2π – *contact* dla pary kanałów (1,1).



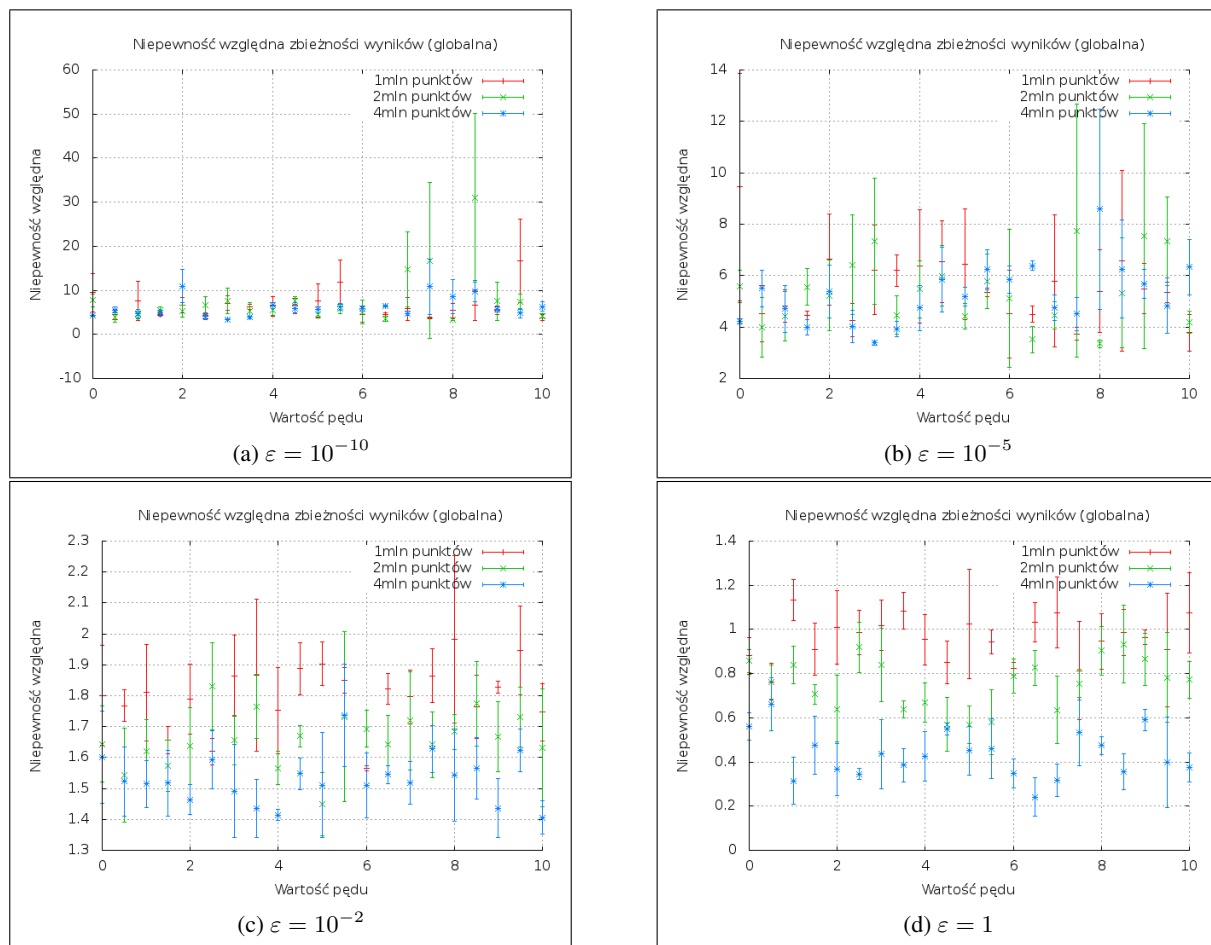
Rysunek 4.3: Zbieżność metody Monte Carlo w zależności od zmiennych kątowych dla siły 2π – *contact* dla pary kanałów (1,3).



Rysunek 4.4: Zbieżność metody Monte Carlo w zależności od zmiennych kątowych dla siły 2π – *contact* dla pary kanałów (1,5).



Rysunek 4.5: Zbieżność metody Monte Carlo w zależności od zmiennych kątowych dla siły 2π – *contact* dla pary kanałów (6,6).

Rysunek 4.6: Zbieżność funkcji w zależności od wartości pędu p' - średnia niepewność względna.

5. Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawiono oraz oceniono przydatność metody całkowania Monte Carlo do obliczania elementów macierzowych złożonych sił jądrowych. Został stworzony program implementujący metodę całkowania Monte Carlo w wersji zrównoleglonej. Bazuje on na istniejącym programie korzystającym z kwadratur Gaussa. Pozwoliło to na ponowne użycie istniejących funkcji opisujących oddziaływanie jądrowe oraz porównanie obu metod. Obliczenia wykonano używając modelu siły $2\pi - contact$ w bazie stanów cząstkowych $|p, q, \alpha\rangle$

Kluczową obserwacją jest stosunkowo wolna zbieżność opisywanego algorytmu. Wynika ona ze znacznego stopnia skomplikowania badanej funkcji: głównie wielowymiarowości ($p, q, p', q', i, j, 5$ zmiennych kątowych); złożoności (liczoną w tysiącach instrukcji) i rodzaju użytych funkcji składowych (m.in. funkcje trygonometryczne). Wolna zbieżność powoduje wzrost zapotrzebowania na moc obliczeniową do uzyskania zadowalającej zbieżności w stosunku do kwadratur Gaussa. Jednakże analiza charakterystyki zmienności funkcji pokazuje, że możliwe jest zidentyfikowanie obszarów szybkiej i wolnej zbieżności, w szczególności w dziedzinie zmiennych kątowych. Tak uzyskana charakterystyka może posłużyć do stworzenia algorytmu wykorzystującego te informacje i w związku z tym uzyskania szybszej zbieżności.

Analiza porównawcza do wyników referencyjnych wtóruje wynikom uzyskanym przy badaniu zbieżności. Jedynie znacząca liczba (kilkadziesiąt/setki milionów) punktów całkowania zapewnia zadowalającą dokładność. Jednakże, analiza została oparta o wyniki referencyjne uzyskane przy pomocy kwadratur Gaussa, które również mogą odbiegać od rzeczywistych wartości. Uzasadnione wydaje się przeprowadzanie dalszych badań oceniających wyniki otrzymane metodą Monte Carlo (obliczone elementy macierzowe stanowią jedynie początek docelowych obliczeń jądrowych). W szczególności przeprowadzona analiza pokazuje dobrą zbieżność dla pewnej grupy elementów macierzowych (większych od jedności). Jest to cecha algorytmu, która może potencjalnie posłużyć do wstępnej, szybkiej estymacji pewnych obszarów badanej funkcji.

Zaletą algorytmu opartego o metodę Monte Carlo jest jego prostota, która pozwala na łatwe zrównoleglenie obliczeń oraz zwiększa czytelność otrzymanego kodu źródłowego. Łatwość zrównoleglenia może okazać się cechą przydatną w masowym skalowaniu obliczeń. Niezależność poszczególnych węzłów (brak szeregowania punktów całkowania) pozwala na tolerancję błędów pojedynczych jednostek obliczeniowych oraz ewentualną diagnostykę. Struktura algorytmu pozwala na separację funkcji całkujących od funkcji domenowych (obliczeń fizycznych). Otwiera to drogę do wydzielenia odpowiednich procedur do bibliotek oraz rozdzielenia problemu całkowania od problemu obliczenia elementów macierzowych dla sił jądrowych. Proponowana separacja pozwoli na niezależne przetestowanie obu komponentów oraz łatwiejsze uruchamianie obliczeń.

Reasumując prezentowany algorytm stanowi pierwszy krok do zastosowania metody Monte Carlo do obliczeń elementów macierzowych sił jądrowych. W szczególności modyfikacje w kierunku poprawy zbieżności w połączeniu z cechami algorytmu leżącymi u jego podstaw mogą w przyszłości wpłynąć na zwiększone zainteresowanie prezentowanym podejściem.

Przedstawiona praca magisterska powstała w ramach prac finansowych przez Narodowe Centrum Nauki (projekt DEC-2013/10/M/ST2/00420). Praca została wykonana z wykorzystaniem infrastruktury PL-Grid.

Bibliografia

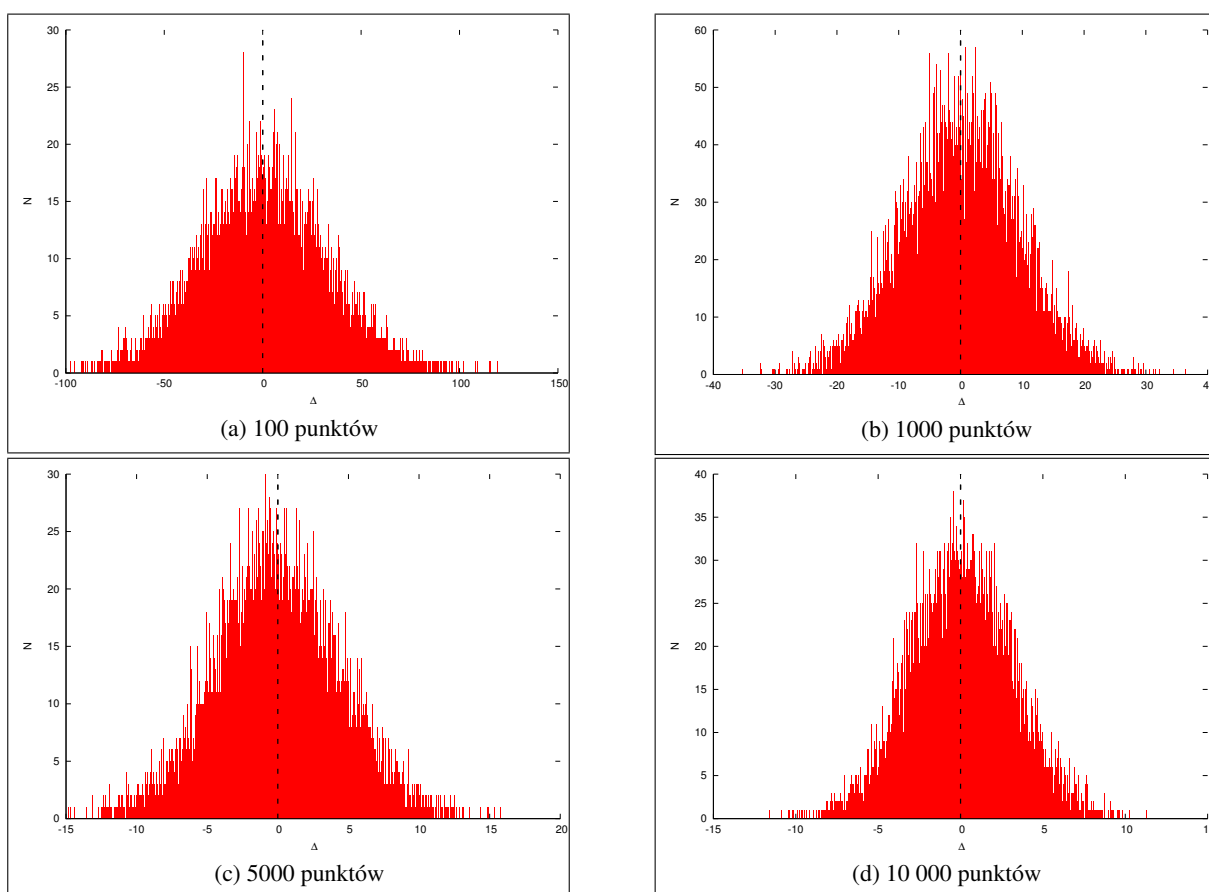
- [1] W. Glöckle. *The Quantum Mechanical Few-Body Problem*. Springer Verlag, 1987.
- [2] A. Stadler, W. Glöckle, P. Sauer. Faddeev equations with three-nucleon force in momentum space. *Phys. Rev. C* 44, 2319, 1991.
- [3] W. Glöckle, H. Witała, D. Hüber, H. Kamada, J. Golak. The three-nucleon continuum: achievements, challenges and applications. *Physics Reports* 274, 107, 1996.
- [4] J. Golak, D. Rozpędzik, R. Skibiński, K. Topolnicki, H. Witała, W. Glöckle, A. Nogga, E. Epelbaum, H. Kamada, Ch. Elster, I. Fachruddin. A new way to perform partial-wave decompositions of few-nucleon forces. *Eur. Phys. J. A* 43, 241, 2010.
- [5] Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski. *Metody Numeryczne*. Wydawnictwo WNT, 1993.
- [6] R. Skibiński. Autoreferat przygotowany w związku z procedurą habilitacyjną. Uniwersytet Jagielloński, 2013.
- [7] R. Skibiński, J. Golak, K. Topolnicki, H. Witała, H. Kamada, W. Glöckle, A. Nogga. The Tucson-Melbourne Three-Nucleon Force in the automatized Partial Wave Decomposition. *Eur. Phys J. A* 47, 48, 2011.
- [8] R. Skibiński, J. Golak, K. Topolnicki, H. Witała, E. Epelbaum, W. Glöckle, H. Krebs, A. Nogga, H. Kamada. Triton with long-range chiral N³LO three-nucleon forces. *Phys. Rev. C* 84, 054005, 2011.
- [9] N. Metropolis. *The Beginning of the Monte Carlo method*. Los Alamos Science, 1987.
- [10] W. Płaczek. Metody Monte Carlo - wykład 2, 2014. <http://th-www.if.uj.edu.pl/placzek/dydaktyka/MMC/>.
- [11] Zhiqiang Tan. Monte Carlo integration with Markov chain. *Journal of Statistical Planning and Inference* 138, 1967, 2008.
- [12] A. Jurlewicz. Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, 2013. <http://prac.im.pwr.wroc.pl/agniesz/dydaktyka.html>.
- [13] Helmut G. Katzgraber. Random Numbers in Scientific Computing: An Introduction. *Lecture given at the International Summer School Modern Computational Science*, 2010. <http://arxiv.org/pdf/1005.4117.pdf>.
- [14] M. Lüscher. A portable high-quality random number generator for lattice field theory simulations. *Computer Phys. Commun.* 79, 100, 1994.
- [15] F. James. RANLUX: A Fortran implementation of the high-quality pseudorandom number generator of Lüscher. *Computer Phys. Commun.* 79, 111, 1994.
- [16] G. Marsaglia and A. Zaman. A New Class of Random Number Generators. *The Annals of Applied Probability* Vol. 1, No. 3, 462, 1991.

-
- [17] Caching in the distributed environment. <https://msdn.microsoft.com/en-us/library/dd129907.aspx>. Dostęp: 2015-03-15.
- [18] V. Bernard, E. Epelbaum, H. Krebs, Ulf-G. Meißner. Subleading contributions to the chiral three-nucleon force. II. Short-range terms and relativistic corrections. *Phys. Rev. C* 84, 054001, 2011.

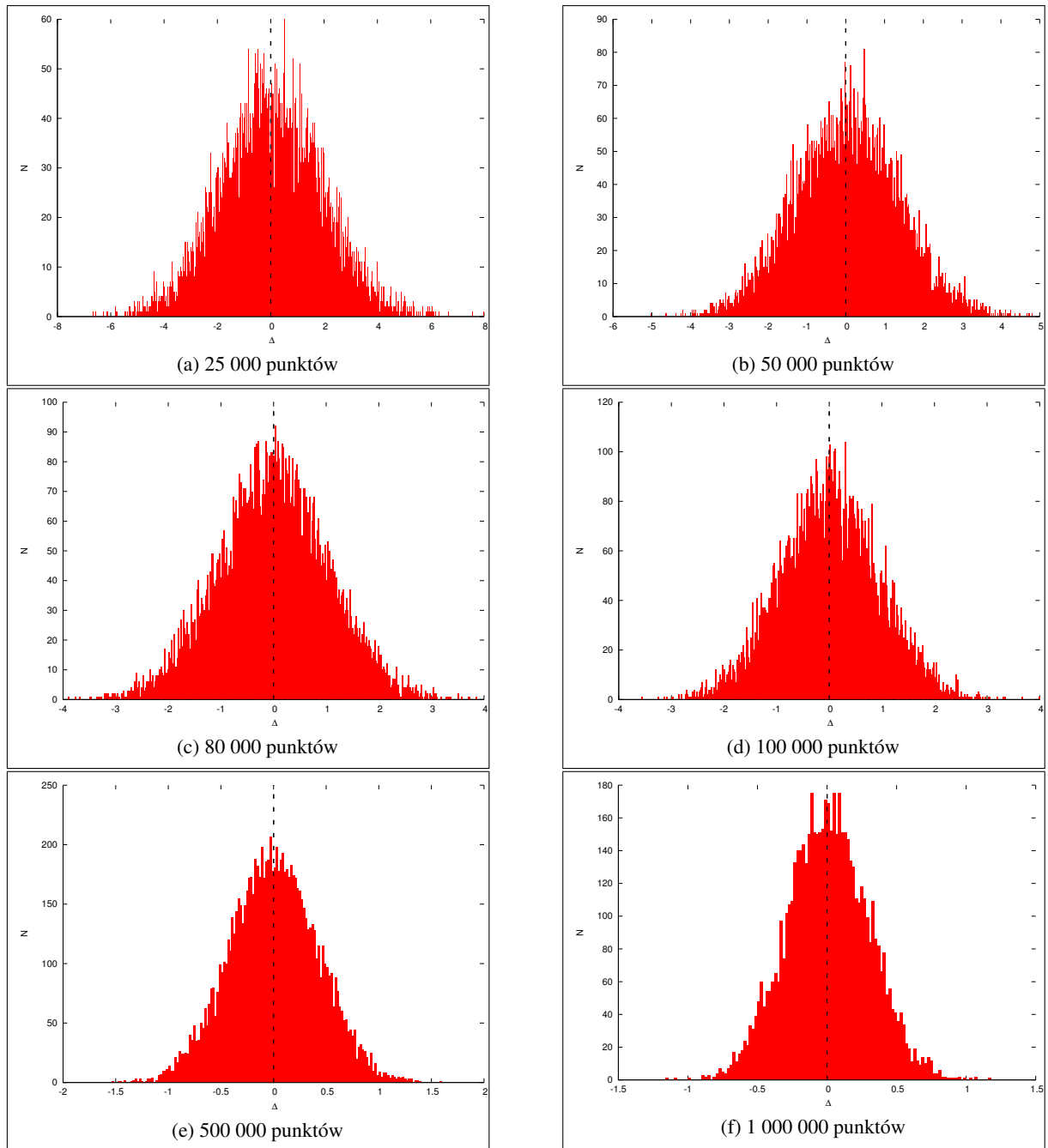
A. Dodatek

Dodatek zawiera komplet wyników omówionych w głównej części pracy, w której zamieszczono jedynie wybrane z poniższych rysunków i tabel.

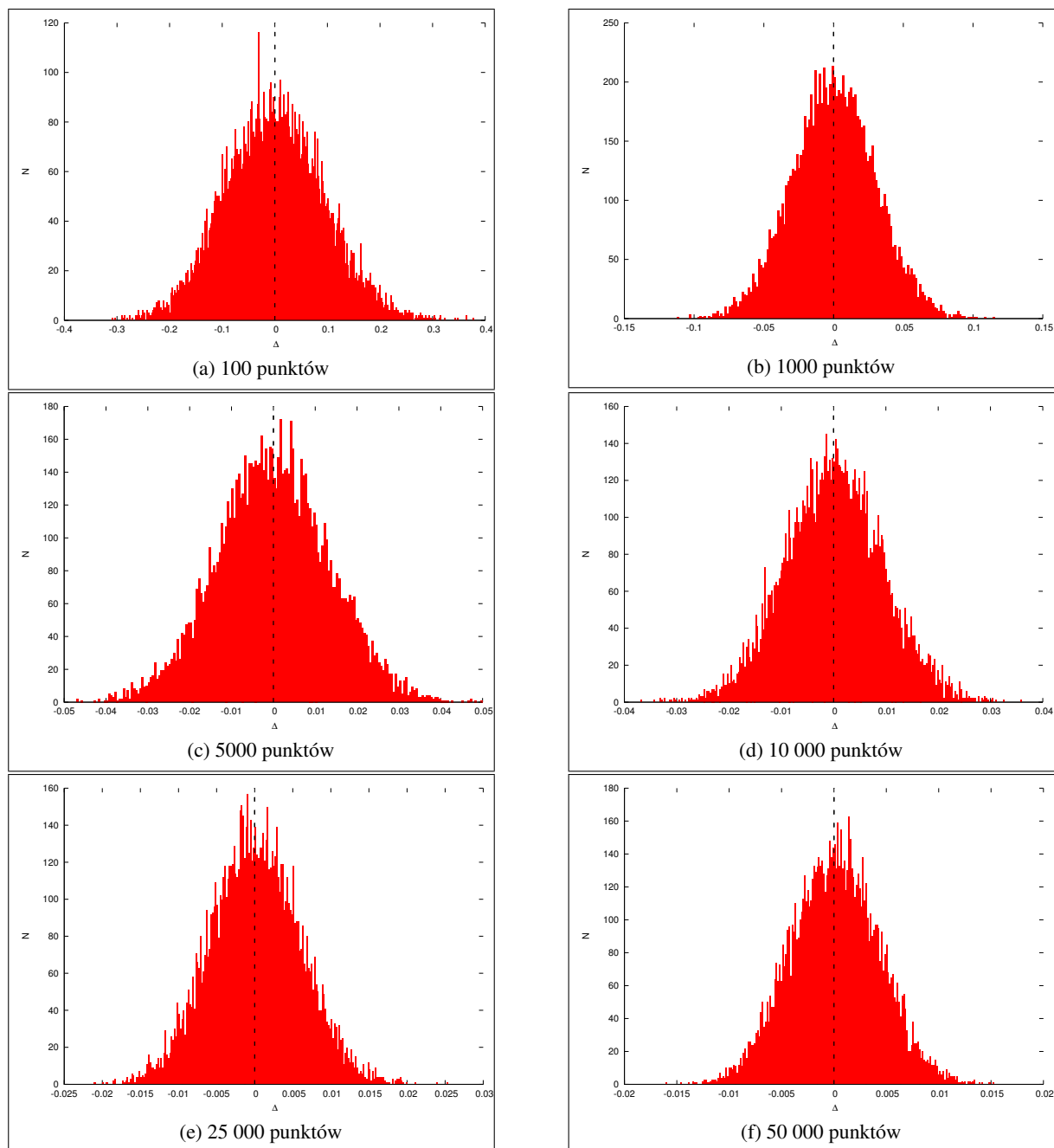
Problem wprowadzający



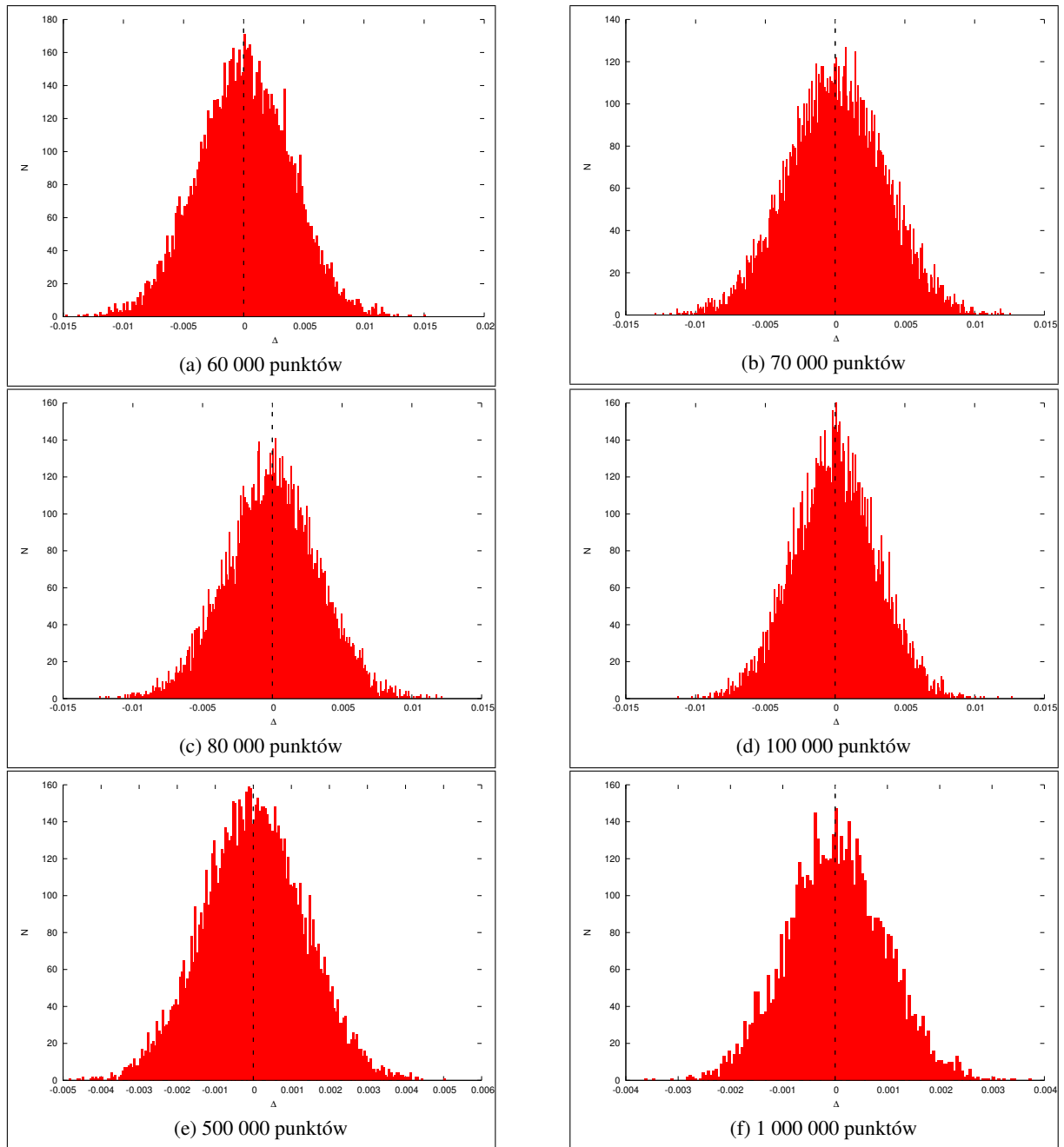
Rysunek A.1: Wybrane histogramy reprezentujące niepewności bezwzględne $\Delta = F - 32\pi^2$ dla zmiennej wielkości próby. Na osi pionowej liczba wyników z daną niepewnością, na osi poziomej wielkość odchylenia. Linia przerywana oznacza zero. (Cześć 1.)



Rysunek A.2: Wybrane histogramy reprezentujące niepewności bezwzględne $\Delta = F - 32\pi^2$ dla zmiennej wielkości próby. Na osi pionowej liczba wyników z daną niepewnością, na osi poziomej wielkość odchylenia. Linia przerywana oznacza zero. (Cześć 2.)



Rysunek A.3: Wybrane histogramy reprezentujące niepewności względne $\Delta = \frac{F-32\pi^2}{32\pi^2}$ dla zmiennej wielkości próby. Na osi pionowej liczba wyników z daną niepewnością, na osi poziomej wielkość odchylenia. Linia przerywana oznacza zero. (Cześć 1.)



Rysunek A.4: Wybrane histogramy reprezentujące niepewności względne $\Delta = \frac{F-32\pi^2}{32\pi^2}$ dla zmiennej wielkości próby. Na osi pionowej liczba wyników z daną niepewnością, na osi poziomej wielkość odchylenia. Linia przerywana oznacza zero. (Cześć 2.)

Testy główne

Tabela wyników testów zbieżności

Definicja zbieżności podana w rozdziale 3.2.1.

Ilość pkt.	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 1$
1 mln	10.38 (3.69)	5.67 (1.35)	1.664 (0.055)	1.585 (0.452)
4 mln	8.30 (2.55)	3.97 (1.85)	1.500 (0.057)	1.466 (0.311)
10 mln	5.93 (3.89)	2.814 (0.345)	1.550 (0.216)	Brak
20 mln	7.08 (5.17)	3.184 (0.206)	1.303 (0.306)	Brak
40 mln	4.09 (5.54)	2.623 (0.190)	1.611(0.132)	Brak
100 mln	6.94 (3.56)	3.174 (0.214)	1.479 (0.243)	Brak

Tablica A.1: Zbieżność dla zestawu pędów A. Tabela przedstawia niepewności względne. W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Ilość pkt.	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 1$
1 mln	5.185 (0.485)	5.188 (0.485)	1.879 (0.056)	0.705 (0.030)
4 mln	5.905 (0.924)	5.905 (0.924)	1.429 (0.031)	0.320 (0.087)
10 mln	4.271 (0.803)	3.720 (0.519)	1.407 (0.086)	0.112 (0.043)
20 mln	4.792 (0.782)	4.540 (0.572)	1.255 (0.110)	0.050 (0.017)
40 mln	7.71 (2.91)	4.77 (1.37)	0.933 (0.038)	0.0352 (0.0081)
100 mln	6.71 (1.77)	5.16 (1.02)	0.812 (0.104)	0.0221 (0.0045)

Tablica A.2: Zbieżność dla zestawu pędów B. Tabela przedstawia niepewności względne. W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Ilość pkt.	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 1$
1 mln	4.809 (0.534)	4.809 (0.534)	3.421 (0.355)	1.320 (0.041)
4 mln	4.71 (1.43)	4.71 (1.43)	2.850 (0.200)	0.853 (0.068)
10 mln	3.533 (0.076)	3.533 (0.076)	2.617 (0.181)	0.711 (0.137)
20 mln	8.07 (3.29)	8.07 (3.29)	2.653 (0.106)	0.3490 (0.0540)
40 mln	4.60 (1.09)	4.602 (1.09)	2.599 (0.061)	0.1875 (0.0427)
100 mln	6.064 (0.370)	6.064 (0.370)	2.087 (0.123)	0.0726 (0.0242)

Tablica A.3: Zbieżność dla zestawu pędów C. Tabela przedstawia niepewności względne. W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Tabela wyników testów porównawczych

Średnia niepewność względna σ

Definicja średniej niepewności względnej podana w podrozdziale 3.2.2.

Ilość pkt.	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 1$
1 mln	$2.0 * 10^7(9.0 * 10^7)$	1028 (2940)	Brak	Brak
4 mln	$1.1 * 10^7(4.9 * 10^7)$	333 (924)	Brak	Brak
10 mln	$2.5 * 10^6(1.0 * 10^7)$	148 (413)	Brak	Brak
20 mln	$3.1 * 10^6(1.3 * 10^7)$	214.31 (590)	Brak	Brak
40 mln	$3.6 * 10^6(1.6 * 10^7)$	176 (502)	Brak	Brak
100 mln	$9.1 * 10^5(3.8 * 10^6)$	71 (197)	Brak	Brak

Tablica A.4: Tabela średniej niepewności względnej dla zestawu A. W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Ilość pkt.	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 1$
1 mln	$1.8 * 10^7(8.8 * 10^7)$	196(963)	2.1 (7.1)	0.168 (0.318)
4 mln	$1.0 * 10^7(6.9 * 10^7)$	67 (297)	0.72 (1.88)	0.071 (0.123)
10 mln	$5.7 * 10^6(2.8 * 10^7)$	62 (239)	0.40 (1.13)	0.046 (0.051)
20 mln	$3.6 * 10^6(1.7 * 10^7)$	24.9 (91.4)	0.25 (0.78)	0.035 (0.045)
40 mln	$2.9 * 10^6(1.5 * 10^7)$	20.7 (72.9)	0.13 (0.31)	0.028 (0.004)
100 mln	$1.6 * 10^6(9.9 * 10^6)$	18.7 (74.9)	0.12 (0.30)	0.021 (0.032)

Tablica A.5: Tabela średniej niepewności względnej dla zestawu B. W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Ilość pkt.	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 1$
1 mln	$1.8 * 10^8(5.8 * 10^8)$	1.49 (5.18)	1.09 (3.12)	0.433 (0.810)
4 mln	$9.2 * 10^7(2.9 * 10^8)$	0.74 (2.22)	0.61 (1.87)	0.182 (0.427)
10 mln	$5.4 * 10^7(2.8 * 10^8)$	0.55 (1.85)	0.41 (1.19)	0.148 (0.329)
20 mln	$4.1 * 10^7(1.7 * 10^8)$	0.40 (1.58)	0.28 (0.89)	0.096 (0.201)
40 mln	$3.3 * 10^7(1.5 * 10^8)$	0.37 (1.40)	0.25 (0.97)	0.069 (0.215)
100 mln	$1.6 * 10^7(9.9 * 10^7)$	0.21 (0.97)	0.11 (0.33)	0.042 (0.073)

Tablica A.6: Tabela średniej niepewności względnej dla zestawu C. W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Maksymalna niepewność względna σ_{max}

Definicja maksymalnej niepewności względnej podana w podrozdziale 3.2.2.

Ilość pkt.	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 1$
1 mln	$5.5 * 10^8$	9846.57	Brak	Brak
4 mln	$3.0 * 10^8$	3099.36	Brak	Brak
10 mln	$6.5 * 10^7$	1386.18	Brak	Brak
20 mln	$8.3 * 10^7$	1978.61	Brak	Brak
40 mln	$9.8 * 10^7$	1681.34	Brak	Brak
100 mln	$2.3 * 10^7$	662.884	Brak	Brak

Tablica A.7: Tabela maksymalnej niepewności względnej dla zestawu A.

Ilość pkt.	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 1$
1 mln	$7.78 * 10^8$	9140.56	39.2800	1.75967
4 mln	$7.41 * 10^8$	2964.11	9.89007	0.66400
10 mln	$2.45 * 10^8$	1933.99	6.13668	0.25830
20 mln	$1.57 * 10^8$	8545.17	4.49192	0.19757
40 mln	$1.56 * 10^8$	6136.69	1.84516	0.18945
100 mln	$1.03 * 10^8$	6846.46	1.62807	0.15833

Tablica A.8: Tabela maksymalnej niepewności względnej dla zestawu B.

Ilość pkt.	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 1$
1 mln	$4.5 * 10^9$	48.2162	26.4890	5.31436
4 mln	$2.3 * 10^9$	16.3839	15.4809	3.64673
10 mln	$1.5 * 10^9$	16.5881	11.0127	2.53388
20 mln	$9.9 * 10^8$	15.7659	8.40102	1.43269
40 mln	$7.6 * 10^8$	12.3703	9.68521	1.98662
100 mln	$3.7 * 10^8$	10.4103	2.52098	0.40298

Tablica A.9: Tabela maksymalnej niepewności względnej dla zestawu C.

Badanie zmienności funkcji

Zbieżność w zależności od zmiennych kątowych

Definicja zbieżności podana w rozdziale 3.2.1. Metodologia obliczeń opisana w rozdziale 4.1.

Zbieżność dla wszystkich kanałów

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	7.28 (6.59)	4.90 (0.78)	7.41 (2.82)
30	3.49 (0.63)	38.73 (47.50)	4.41 (0.81)
45	5.58 (2.16)	4.82 (0.92)	5.47 (2.05)
60	3.54 (0.99)	18.93 (13.66)	3.31 (0.43)
75	3.34 (0.60)	9.69 (4.55)	6.43 (4.47)
90	5.48 (1.98)	8.07 (1.93)	7.44 (2.78)
105	3.86 (0.65)	5.35 (1.27)	14.77 (14.37)
120	3.77 (0.30)	3.44 (0.17)	4.77 (0.78)
135	3.24 (0.67)	4.39 (1.33)	3.93 (0.63)
150	4.59 (0.23)	4.55 (1.84)	8.74 (6.42)
175	6.6026 (0.2029)	23.97 (16.56)	7.85 (5.27)
180	8.7735 (5.1840)	6.46 (3.36)	5.51 (0.83)

Tablica A.10: Tabela przedstawia zbieżność globalną dla ustalonego θ_q . W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	4.23 (0.72)	15.57 (11.22)	7.02 (1.70)
30	4.94 (0.37)	6.34 (0.89)	4.67 (0.52)
45	5.07 (2.28)	11.93 (7.51)	4.14 (1.44)
60	4.31 (0.48)	3.03 (0.77)	3.66 (0.73)
75	7.95 (2.79)	6.85 (3.16)	4.94 (1.06)
90	13.89 (7.95)	50.76 (39.18)	9.39 (3.03)
105	5.51 (1.25)	3.94 (0.16)	4.61 (0.74)
120	6.87 (3.69)	19.40 (21.34)	8.15 (1.73)
135	7.50 (2.73)	4.38 (0.31)	3.67 (0.36)
150	3.581 (0.049)	4.01 (0.46)	5.54 (0.34)
175	5.01 (1.00)	9.31 (5.14)	8.08 (2.95)
180	3.73 (0.21)	8.88 (2.03)	6.09 (1.28)

Tablica A.11: Tabela przedstawia zbieżność globalną dla ustalonego θ_q . W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	5.35 (1.42)	3.52 (0.46)	3.23 (0.13)
30	3.77 (1.22)	4.63 (0.16)	3.04 (0.80)
45	3.71 (0.72)	2.75 (0.32)	4.09 (0.52)
60	4.42 (0.99)	5.17 (1.45)	5.13 (1.68)
75	3.680 (0.020)	2.63 (0.32)	3.61 (1.82)
90	3.05 (0.37)	2.95 (0.81)	18.41 (15.42)
105	4.58 (0.44)	4.48 (1.23)	3.17 (0.26)
120	7.34 (2.44)	4.21 (0.84)	5.64 (2.39)
135	2.91 (0.48)	3.01 (0.40)	5.88 (5.2164)
150	4.78 (1.88)	4.82 (0.80)	16.39 (8.76)
175	2.14 (3.03)	6.09 (1.45)	4.31 (0.99)
180	4.08 (1.36)	2.83 (0.58)	5.12 (0.73)

Tablica A.12: Tabela przedstawia zbieżność globalną dla ustalonego θ_{pr} . W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	5.1198 (1.0721)	3.5358 (0.5005)	6.6003 (0.4357)
30	4.1521 (0.4499)	3.1625 (0.2458)	8.4151 (3.1714)
45	4.2393 (0.1288)	6.0706 (2.1160)	28.2625 (28.1116)
60	4.0888 (0.7616)	12.2792 (4.9022)	19.3448 (14.3519)
75	7.5741 (1.8068)	8.3022 (5.9520)	3.0849 (0.2510)
90	6.3400 (1.0856)	6.4411 (2.6092)	4.6575 (1.0522)
105	4.2714 (0.4101)	9.8861 (5.2467)	3.7928 (0.7068)
120	5.6048 (0.8342)	5.7927 (2.6371)	11.7580 (7.5066)
135	5.7234 (0.7888)	2.7356 (0.4734)	4.9026 (1.9809)
150	4.7011 (0.9966)	4.5710 (0.7467)	6.8912 (2.3468)
175	9.1466 (5.1955)	5.9536 (0.5010)	4.4803 (1.7178)
180	4.7249 (1.0881)	10.0452 (4.3316)	4.9828 (0.9780)
195	12.6495 (11.9050)	17.1270 (14.4747)	8.1773 (3.1360)
210	4.5202 (0.9235)	8.7818 (4.4387)	5.4637 (0.3328)
225	3.3364 (0.5710)	4.4263 (1.4505)	4.2924 (0.1917)
240	5.2186 (0.9267)	4.7936 (1.6158)	4.5037 (0.3989)
255	4.2859 (1.3508)	4.3953 (0.8904)	7.1244 (2.1188)
270	4.7264 (0.3288)	17.6351 (1.7775)	6.4140 (2.1500)
285	5.7746 (0.9804)	7.5633 (4.8156)	3.4508 (0.0574)
300	3.2487 (0.2604)	24.6270 (19.1770)	5.4431 (1.2511)
315	3.9228 (0.2563)	8.1337 (4.0703)	4.4257 (0.6662)
330	7.1338 (2.2271)	4.0080 (0.3990)	3.7234 (0.3896)
345	3.2729 (0.8091)	12.7120 (6.7601)	3.9957 (0.9693)
360	4.4691 (2.2980)	5.0517 (0.7202)	6.8056 (1.1421)

Tablica A.13: Tabela przedstawia zbieżność globalną dla ustalonego ϕ_{qr} . W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowna (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	3.8814 (0.2689)	2.2428 (0.8061)	4.1362 (2.0431)
30	3.7549 (0.5312)	7.2294 (3.3618)	2.4698 (0.3094)
45	3.2909 (1.5018)	2.7896 (0.6398)	2.5463 (0.2671)
60	3.6890 (0.9720)	2.9641 (0.2018)	14.0829 (12.0858)
75	4.3927 (0.7024)	2.3351 (0.5878)	2.0136 (0.3571)
90	3.5740 (0.1342)	115.0466 (83.2658)	1.9604 (0.3793)
105	2.6574 (0.6166)	8.3622 (4.9883)	2.8137 (1.0204)
120	12.7370 (7.9630)	3.4344 (1.7106)	2.0144 (0.2183)
135	4.3826 (1.2570)	1.9186 (0.1132)	19.1481 (14.2428)
150	4.0838 (2.1925)	2.6593 (0.0580)	2.4182 (0.2358)
175	2.6582 (0.2016)	6.9651 (2.7077)	2.4418 (0.4686)
180	9.8129 (3.9347)	2.2839 (0.4998)	2.2713 (0.5726)
195	10.1340 (11.0399)	6.2769 (3.4484)	3.8041 (1.5852)
210	2.6797 (0.0498)	3.4473 (0.4311)	5.7020 (1.8211)
225	3.4491 (0.8481)	3.1509 (0.2994)	2.1890 (0.1751)
240	3.8900 (1.7770)	2.3736 (0.5587)	3.0877 (0.1746)
255	3.9501 (0.7585)	4.3178 (1.7304)	2.4098 (0.4170)
270	8.5246 (3.8110)	5.0963 (4.0068)	2.1617 (0.3145)
285	2.9168 (0.3311)	4.6834 (1.6059)	2.7938 (0.7530)
300	3.3159 (0.2551)	6.2726 (2.1434)	5.5725 (1.8464)
315	4.3876 (1.3987)	6.5278 (1.4833)	2.4892 (0.5047)
330	10.1430 (3.0548)	2.2041 (0.6930)	3.7013 (0.7364)
345	2.4791 (0.2908)	4.0836 (2.4389)	3.8823 (2.6444)
360	2.6850 (1.0322)	2.2875 (0.3927)	2.7225 (0.4531)

Tablica A.14: Tabela przedstawia zbieżność globalną dla ustalonego ϕ_p . W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Zbieżność dla wybranych kanałów

Zbieżność dla zmiennej kątowej θ_q

Miara kątowa ($^\circ$)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0147 (0.0062)	0.1072 (0.0691)	0.0040 (0.0015)
30	0.3615 (0.1798)	0.6080 (0.2764)	0.2454 (0.1356)
45	0.0342 (0.0144)	0.0709 (0.0327)	0.1097 (0.0431)
60	0.1548 (0.0807)	0.0059 (0.0021)	0.0533 (0.0328)
75	0.0590 (0.0216)	0.0159 (0.0057)	0.1113 (0.0521)
90	0.1091 (0.0681)	0.1672 (0.0797)	0.1500 (0.0484)
105	0.4872 (0.2282)	0.3380 (0.1468)	0.1751 (0.0749)
120	0.0901 (0.0291)	0.1238 (0.0524)	0.0178 (0.0083)
135	0.0634 (0.0208)	0.0844 (0.0357)	0.0584 (0.0242)
150	0.1610 (0.1134)	0.0784 (0.0356)	0.0914 (0.0365)
175	0.2932 (0.1351)	0.1837 (0.1046)	0.1597 (0.0538)
180	0.9186 (0.5127)	6.4200 (7.0768)	0.8380 (0.4791)

Tablica A.15: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego θ_q w kanale (1,1). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa ($^\circ$)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0485 (0.0292)	0.0483 (0.0185)	0.0170 (0.0102)
30	0.8312 (0.5022)	0.1428 (0.0437)	0.0192 (0.0068)
45	0.0492 (0.0200)	0.0136 (0.0088)	0.0120 (0.0065)
60	0.0768 (0.0418)	0.0048 (0.0023)	0.0250 (0.0158)
75	0.0061 (0.0025)	0.0089 (0.0037)	0.0361 (0.0202)
90	0.5168 (0.2891)	0.6842 (0.4596)	0.1370 (0.0505)
105	0.0902 (0.0530)	0.0771 (0.0439)	0.0243 (0.0168)
120	0.0445 (0.0169)	0.0508 (0.0239)	0.0249 (0.0118)
135	0.0441 (0.0158)	0.0580 (0.0231)	0.0368 (0.0161)
150	0.0398 (0.0147)	0.0233 (0.0143)	0.0242 (0.0088)
175	0.4476 (0.2314)	0.1855 (0.0877)	0.1957 (0.0876)
180	0.0446 (0.0182)	0.0387 (0.0267)	0.0401 (0.0251)

Tablica A.16: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego θ_q w kanale (1,5). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.1078 (0.0741)	0.1999 (0.0555)	0.0291 (0.0135)
30	0.5212 (0.1821)	0.2497 (0.1020)	0.0984 (0.0646)
45	0.0501 (0.0194)	0.0709 (0.0447)	0.1023 (0.0343)
60	0.0862 (0.0443)	0.0040 (0.0020)	0.0347 (0.0177)
75	0.0363 (0.0196)	0.0113 (0.0053)	0.0731 (0.0360)
90	0.1178 (0.0696)	0.0982 (0.0446)	0.0187 (0.0082)
105	0.0397 (0.0137)	0.0342 (0.0143)	0.0265 (0.0139)
120	0.1217 (0.0448)	0.3417 (0.1723)	0.1156 (0.0468)
135	0.0397 (0.0153)	0.0566 (0.0236)	0.0425 (0.0170)
150	0.1081 (0.0564)	0.0301 (0.0103)	0.0939 (0.0527)
175	0.8780 (0.4566)	0.2629 (0.1742)	0.2737 (0.1307)
180	0.2302 (0.0744)	0.0490 (0.0256)	0.0204 (0.0079)

Tablica A.17: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego θ_q w kanale (1,5). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0187 (0.0120)	0.0448 (0.0199)	0.0060 (0.0034)
30	0.0718 (0.0274)	0.0612 (0.0350)	0.0350 (0.0134)
45	0.0283 (0.0115)	0.0261 (0.0126)	0.0466 (0.0182)
60	0.1075 (0.0580)	0.0111 (0.0046)	0.0481 (0.0269)
75	0.1051 (0.0583)	0.0663 (0.0428)	0.2222 (0.1209)
90	0.0181 (0.0068)	0.0290 (0.0186)	0.0302 (0.0116)
105	0.0957 (0.0532)	0.0760 (0.0373)	0.0301 (0.0118)
120	0.0512 (0.0172)	0.0559 (0.0212)	0.0152 (0.0063)
135	0.0161 (0.0068)	0.0419 (0.0162)	0.0256 (0.0105)
150	0.0546 (0.0337)	0.0271 (0.0142)	0.0269 (0.0117)
175	0.0489 (0.0197)	0.0352 (0.0174)	0.0240 (0.0085)
180	0.1363 (0.0760)	0.0732 (0.0346)	0.0657 (0.0366)

Tablica A.18: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego θ_q w kanale (6,6). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Zbieżność dla zmiennej kątowej θ_{qt}

Miara kątowa ($^{\circ}$)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.2204 (0.0947)	0.1256 (0.0808)	0.0418 (0.0162)
30	0.0973 (0.0416)	0.1042 (0.0541)	0.1935 (0.0899)
45	0.1210 (0.0453)	0.0624 (0.0236)	0.0668 (0.0333)
60	0.1260 (0.0837)	0.2201 (0.0856)	0.1210 (0.0561)
75	0.3876 (0.1257)	0.3532 (0.1877)	0.4612 (0.2438)
90	0.1097 (0.0436)	0.1007 (0.0408)	0.0574 (0.0399)
105	0.5823 (0.3123)	0.1297 (0.0867)	0.0751 (0.0468)
120	0.1194 (0.0524)	0.1648 (0.0732)	0.0528 (0.0202)
135	0.0543 (0.0375)	0.0812 (0.0320)	0.1017 (0.0427)
150	0.0754 (0.0295)	0.0722 (0.0264)	0.2409 (0.1270)
175	0.1097 (0.0713)	0.2088 (0.0882)	0.0725 (0.0440)
180	0.0529 (0.0360)	0.3705 (0.1932)	0.1479 (0.1055)

Tablica A.19: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego θ_{qt} w kanale (1,1). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa ($^{\circ}$)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0424 (0.0190)	0.0124 (0.0058)	0.0134 (0.0080)
30	0.0114 (0.0071)	0.0220 (0.0129)	0.0040 (0.0027)
45	0.1029 (0.0530)	0.0549 (0.0291)	0.0430 (0.0146)
60	0.0133 (0.0048)	0.0228 (0.0080)	0.0073 (0.0050)
75	0.0186 (0.0068)	0.0041 (0.0020)	0.0232 (0.0100)
90	0.0044 (0.0018)	0.0164 (0.0057)	0.0112 (0.0074)
105	0.0985 (0.0391)	0.0069 (0.0027)	0.0589 (0.0223)
120	0.0169 (0.0107)	0.0172 (0.0068)	0.0226 (0.0103)
135	0.0111 (0.0040)	0.0238 (0.0086)	0.0029 (0.0016)
150	4.2821 (5.1859)	1.6907 (1.1210)	2.1354 (1.8427)
175	0.0052 (0.0022)	0.0081 (0.0043)	0.0199 (0.0105)
180	0.0479 (0.0258)	0.0186 (0.0071)	0.0132 (0.0066)

Tablica A.20: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego θ_{qt} w kanale (1,3). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	14.4884 (17.7545)	2.7241 (1.9012)	2.7765 (1.5850)
30	1.4172 (0.8123)	1.6594 (1.3340)	4.2864 (2.8849)
45	3.0751 (2.8877)	2.3989 (0.6170)	0.5604 (0.3581)
60	1.0770 (0.4727)	0.6477 (0.3681)	0.2219 (0.1368)
75	1.3184 (1.1122)	0.8572 (0.3241)	1.2228 (0.2849)
90	1.3662 (0.5208)	2.4283 (1.5400)	2.5545 (1.8000)
105	26.3287 (20.1612)	1.2706 (0.6305)	1.2677 (0.4461)
120	0.5814 (0.3615)	0.6556 (0.1044)	1.1141 (0.1422)
135	0.8731 (0.6481)	2.6404 (2.6224)	1.2438 (1.0430)
150	6.8784 (5.1785)	1.2032 (0.4762)	13.9561 (10.1417)
175	35.3913 (27.6198)	0.6743 (0.2821)	3.1641 (1.8895)
180	2.0435 (1.5903)	1.1835 (0.5904)	1.6974 (0.8896)

Tablica A.21: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\theta_{q'}$ w kanale (1,5). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0494 (0.0230)	0.0372 (0.0249)	0.0134 (0.0048)
30	0.0317 (0.0138)	0.0361 (0.0253)	0.0691 (0.0282)
45	0.0384 (0.0133)	0.0300 (0.0108)	0.0205 (0.0126)
60	0.0595 (0.0226)	0.0608 (0.0200)	0.0202 (0.0072)
75	0.1673 (0.0761)	0.1116 (0.0533)	0.1181 (0.0502)
90	0.0321 (0.0197)	0.0362 (0.0133)	0.0181 (0.0122)
105	0.1749 (0.0738)	0.0542 (0.0302)	0.0334 (0.0123)
120	0.0478 (0.0176)	0.0513 (0.0208)	0.0172 (0.0069)
135	0.0092 (0.0038)	0.0144 (0.0100)	0.0192 (0.0070)
150	0.0248 (0.0108)	0.0327 (0.0218)	0.0799 (0.0431)
175	0.0666 (0.0320)	0.0701 (0.0339)	0.0308 (0.0146)
180	0.0402 (0.0196)	0.0707 (0.0370)	0.0211 (0.0111)

Tablica A.22: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\theta_{q'}$ w kanale (6,6). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Zbieżność dla zmiennej kątowej $\theta_{p'}$

Miara kątowa ($^{\circ}$)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.1552 (0.1022)	0.1134 (0.0721)	0.0508 (0.0304)
30	0.0989 (0.0363)	0.1445 (0.0919)	0.0474 (0.0160)
45	0.1664 (0.0533)	0.1489 (0.0665)	0.0808 (0.0347)
60	0.1085 (0.0432)	0.1149 (0.0619)	0.1209 (0.0373)
75	0.1710 (0.0489)	0.1575 (0.0889)	0.0934 (0.0350)
90	0.3119 (0.1755)	0.0593 (0.0203)	0.1105 (0.0354)
105	0.2139 (0.0949)	0.1116 (0.0445)	0.0548 (0.0254)
120	0.0112 (0.0050)	0.1776 (0.1148)	0.0926 (0.0499)
135	0.0858 (0.0509)	0.0357 (0.0172)	0.0918 (0.0506)
150	0.4747 (0.0944)	0.0636 (0.0236)	0.0836 (0.0268)
175	0.0205 (0.0290)	0.1727 (0.0753)	0.0461 (0.0315)
180	0.0065 (0.0041)	0.0841 (0.0288)	0.0519 (0.0202)

Tablica A.23: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\theta_{p'}$ w kanale (1,1). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa ($^{\circ}$)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.5518 (0.0772)	0.1303 (0.0550)	0.1441 (0.0741)
30	0.2756 (0.1782)	0.1539 (0.0958)	0.0671 (0.0257)
45	0.0846 (0.0328)	0.0889 (0.0628)	0.1978 (0.0978)
60	0.2042 (0.0622)	0.1041 (0.0640)	0.0497 (0.0174)
75	0.1900 (0.0714)	0.2532 (0.1012)	0.1805 (0.0777)
90	0.3460 (0.2027)	0.5104 (0.2677)	0.0384 (0.0215)
105	0.3636 (0.2375)	0.2508 (0.1807)	0.1714 (0.0952)
120	0.1595 (0.1115)	0.2975 (0.2090)	0.1419 (0.0781)
135	0.1684 (0.0738)	0.0430 (0.0215)	0.0412 (0.0146)
150	0.2612 (0.1268)	0.2785 (0.1619)	0.1845 (0.0718)
175	0.0815 (0.1153)	0.2519 (0.1619)	0.1349 (0.0404)
180	0.0452 (0.0219)	0.1197 (0.0633)	0.1466 (0.1042)

Tablica A.24: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\theta_{p'}$ w kanale (1,3). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	16.5462 (21.0519)	0.4618 (0.1138)	1.5977 (1.0217)
30	1.4602 (1.2612)	3.0520 (2.7802)	0.9938 (0.5934)
45	2.2566 (1.4371)	2.7546 (1.8827)	34.3824 (25.5208)
60	2.6427 (1.8774)	2.3618 (1.5861)	0.3597 (0.1662)
75	2.0764 (2.2279)	1.3808 (0.5441)	11.0300 (14.8596)
90	4.8735 (4.7403)	0.8827 (0.0912)	0.2913 (0.1190)
105	3.2960 (1.6951)	2.1757 (1.0497)	3.5429 (3.3700)
120	0.5837 (0.1221)	1.0965 (0.3539)	1.3829 (0.5532)
135	1.0871 (0.6788)	0.6763 (0.4715)	1.6397 (0.8963)
150	1.5528 (0.6410)	0.5414 (0.1180)	16.7960 (22.7352)
175	0.2465 (0.3486)	0.5978 (0.4024)	2.1937 (1.3305)
180	1.3971 (0.8521)	1.1906 (0.5707)	5.3578 (6.4543)

Tablica A.25: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\theta_{p'}$ w kanale (1,5). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0801 (0.0421)	0.0433 (0.0238)	0.0191 (0.0124)
30	0.0308 (0.0151)	0.0473 (0.0253)	0.0256 (0.0088)
45	0.0658 (0.0228)	0.0600 (0.0226)	0.0368 (0.0187)
60	0.0275 (0.0120)	0.0428 (0.0206)	0.0296 (0.0126)
75	0.0752 (0.0257)	0.0552 (0.0331)	0.0291 (0.0168)
90	0.1047 (0.0510)	0.0193 (0.0100)	0.0433 (0.0146)
105	0.0589 (0.0280)	0.0310 (0.0117)	0.0209 (0.0102)
120	0.0306 (0.0112)	0.0707 (0.0478)	0.0314 (0.0192)
135	0.0185 (0.0074)	0.0093 (0.0043)	0.0336 (0.0197)
150	0.1815 (0.0508)	0.0249 (0.0148)	0.0346 (0.0120)
175	0.0099 (0.0140)	0.0512 (0.0215)	0.0142 (0.0052)
180	0.0029 (0.0015)	0.0353 (0.0182)	0.0340 (0.0122)

Tablica A.26: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\theta_{p'}$ w kanale (6,6). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Zbieżność dla zmiennej kątowej ϕ_{pr}

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0854 (0.0436)	0.0849 (0.0331)	0.0173 (0.0063)
30	0.1902 (0.0858)	0.1718 (0.0760)	0.1193 (0.0616)
45	0.1551 (0.1060)	0.0961 (0.0389)	0.1135 (0.0376)
60	0.2512 (0.1297)	0.1727 (0.0490)	0.0895 (0.0519)
75	0.0618 (0.0286)	0.1843 (0.0821)	0.0119 (0.0055)
90	0.0275 (0.0166)	0.1250 (0.0707)	0.0086 (0.0053)
105	0.2819 (0.1353)	0.2303 (0.0796)	0.0776 (0.0505)
120	0.1090 (0.0338)	0.1733 (0.1170)	0.1211 (0.0652)
135	0.4094 (0.2090)	0.1040 (0.0438)	0.0718 (0.0240)
150	0.1707 (0.0558)	0.1444 (0.0601)	0.1349 (0.0410)
175	0.0834 (0.0573)	0.1465 (0.0908)	0.1227 (0.0738)
180	0.0757 (0.0280)	0.0541 (0.0276)	0.1829 (0.0929)
195	0.3215 (0.0726)	0.0737 (0.0289)	0.0994 (0.0416)
210	0.3121 (0.1014)	0.1696 (0.0710)	0.0727 (0.0342)
225	0.0927 (0.0495)	0.1019 (0.0458)	0.0877 (0.0433)
240	0.2087 (0.0654)	0.1151 (0.0470)	0.1357 (0.0581)
255	0.1955 (0.0764)	0.1139 (0.0525)	0.0372 (0.0236)
270	0.1992 (0.1164)	0.0546 (0.0201)	0.0742 (0.0287)
285	0.3224 (0.0931)	0.1086 (0.0489)	0.0900 (0.0525)
300	0.1597 (0.1042)	0.2040 (0.0840)	0.1512 (0.0537)
315	0.0757 (0.0330)	0.1630 (0.0760)	0.1613 (0.0557)
330	0.1323 (0.0687)	0.1091 (0.0539)	0.0552 (0.0389)
345	0.2807 (0.1760)	0.0463 (0.0177)	0.1187 (0.0438)
360	0.0206 (0.0145)	0.1702 (0.1072)	0.1646 (0.0530)

Tablica A.27: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego ϕ_{pr} w kanale (1,1). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.4553 (0.3166)	0.1203 (0.0804)	0.1712 (0.0986)
30	0.3997 (0.1780)	0.1999 (0.1009)	0.1305 (0.0872)
45	0.2838 (0.1279)	0.2886 (0.1760)	0.1278 (0.0749)
60	0.0486 (0.0181)	0.0892 (0.0568)	0.1447 (0.0980)
75	0.0968 (0.0491)	0.2842 (0.1334)	0.2141 (0.0844)
90	0.1315 (0.0889)	0.1983 (0.0972)	0.1321 (0.0535)
105	0.4063 (0.1615)	0.1187 (0.0565)	0.1113 (0.0696)
120	0.2911 (0.1649)	0.3483 (0.1789)	0.1062 (0.0351)
135	0.2498 (0.0750)	0.1623 (0.1084)	0.1143 (0.0574)
150	0.0587 (0.0333)	0.2100 (0.1229)	0.0710 (0.0480)
175	0.1493 (0.0577)	0.1683 (0.0819)	0.3324 (0.1689)
180	0.0749 (0.0367)	0.1771 (0.0822)	0.0816 (0.0290)
195	0.1927 (0.1112)	0.1925 (0.1178)	0.0870 (0.0308)
210	0.1132 (0.0528)	0.0757 (0.0284)	0.1749 (0.0677)
225	0.5687 (0.2546)	0.3462 (0.1532)	0.1627 (0.0630)
240	0.2673 (0.0990)	0.1358 (0.0589)	0.1689 (0.0587)
255	0.0913 (0.0557)	0.0335 (0.0192)	0.0504 (0.0236)
270	0.3521 (0.0961)	0.2999 (0.1489)	0.0811 (0.0372)
285	0.2479 (0.1661)	0.1312 (0.0743)	0.1083 (0.0753)
300	0.3700 (0.1985)	0.0765 (0.0285)	0.2325 (0.0935)
315	0.2784 (0.0816)	0.3025 (0.1990)	0.0634 (0.0401)
330	0.2176 (0.1057)	0.1869 (0.0921)	0.2213 (0.1214)
345	0.2154 (0.0700)	0.2519 (0.1131)	0.1846 (0.0711)
360	0.4190 (0.2031)	0.1087 (0.0416)	0.0507 (0.0241)

Tablica A.28: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\phi_{p'}$ w kanale (1,3). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	2.36 (0.61)	1.47 (0.92)	0.832 (0.534)
30	33.88 (31.03)	1.32 (0.630)	1.36 (0.69)
45	2.95 (0.33)	5.71 (4.03)	5.75 (6.07)
60	1.17 (0.20)	21.80 (29.13)	1.25 (0.59)
75	1.74 (0.98)	6.27 (7.66)	0.498 (0.296)
90	3.06 (2.09)	7.11 (6.37)	1.36 (0.86)
105	2.99 (2.16)	1.50 (1.16)	0.80 (0.57)
120	0.9654 (0.1418)	1.16 (0.17)	1.17 (0.52)
135	11.26 (7.59)	2.99 (1.38)	12.83 (9.04)
150	7.49 (8.68)	1.33 (0.85)	2.59 (1.5219)
175	0.7894 (0.2426)	3.17 (1.65)	2.63 (1.69)
180	2.70 (1.49)	4.25 (4.16)	1.49 (0.72)
195	4.37 (2.98)	1.82 (1.07)	201.08 (151.05)
210	1.70 (0.88)	0.87 (0.64)	18.74 (23.97)
225	1.9411 (1.2825)	3.1748 (2.6458)	2.3222 (1.6178)
240	3.5341 (0.5699)	4.7512 (3.4111)	2.2357 (1.1556)
255	5.7224 (3.0624)	1.7701 (1.0383)	0.4799 (0.1941)
270	1.6363 (0.8258)	397.53 (560.46)	1.2610 (0.4426)
285	1.1859 (0.1308)	28.68 (20.89)	2.944 (1.341)
300	2.9006 (2.3520)	0.5970 (0.2701)	1.5866 (0.7807)
315	2.0429 (1.2049)	1.3086 (0.5918)	1.1242 (0.5181)
330	5.0312 (3.5909)	0.1095 (0.0430)	2.4214 (1.5234)
345	1.5695 (0.7518)	17.28 (12.89)	1.0756 (0.1755)
360	1.2205 (0.3544)	1.2966 (0.491)	1.0773 (0.2474)

Tablica A.29: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego ϕ_{pr} w kanale (1,5). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0402 (0.0172)	0.0351 (0.0228)	0.0065 (0.0043)
30	0.0597 (0.0419)	0.0519 (0.0270)	0.0408 (0.0228)
45	0.0581 (0.0336)	0.0356 (0.0134)	0.0499 (0.0172)
60	0.0722 (0.0315)	0.0681 (0.0229)	0.0418 (0.0220)
75	0.0165 (0.0095)	0.0704 (0.0273)	0.0011 (0.0004)
90	0.0108 (0.0065)	0.0471 (0.0300)	0.0090 (0.0032)
105	0.1006 (0.0395)	0.1049 (0.0348)	0.0265 (0.0092)
120	0.0159 (0.0111)	0.0676 (0.0402)	0.0402 (0.0273)
135	0.1460 (0.0613)	0.0487 (0.0176)	0.0169 (0.0059)
150	0.0563 (0.0195)	0.0581 (0.0221)	0.0466 (0.0160)
175	0.0268 (0.0099)	0.0622 (0.0265)	0.0428 (0.0209)
180	0.0141 (0.0060)	0.0229 (0.0114)	0.0684 (0.0371)
195	0.1045 (0.0327)	0.0274 (0.0098)	0.0347 (0.0129)
210	0.1115 (0.0483)	0.0416 (0.0188)	0.0230 (0.0104)
225	0.0374 (0.0143)	0.0265 (0.0093)	0.0467 (0.0266)
240	0.0793 (0.0302)	0.0389 (0.0147)	0.0443 (0.0174)
255	0.0807 (0.0358)	0.0407 (0.0158)	0.0211 (0.0098)
270	0.0756 (0.0479)	0.0049 (0.0031)	0.0221 (0.0095)
285	0.1019 (0.0339)	0.0351 (0.0167)	0.0231 (0.0126)
300	0.0720 (0.0443)	0.0630 (0.0243)	0.0631 (0.0215)
315	0.0182 (0.0118)	0.0672 (0.0256)	0.0612 (0.0272)
330	0.0641 (0.0218)	0.0249 (0.0172)	0.0251 (0.0171)
345	0.1074 (0.0573)	0.0154 (0.0063)	0.0414 (0.0186)
360	0.0251 (0.0101)	0.0684 (0.0398)	0.0651 (0.0257)

Tablica A.30: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\phi_{p'}$ w kanale (6,6). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Zbieżność dla zmiennej kątowej ϕ_{qt}

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0107 (0.0055)	0.0035 (0.0014)	0.0035 (0.0012)
30	0.0013 (0.0005)	0.0007 (0.0002)	0.0003 (0.0002)
45	0.0039 (0.0016)	0.0018 (0.0009)	0.0015 (0.0006)
60	0.0027 (0.0012)	0.0045 (0.0022)	0.0019 (0.0011)
75	0.0018 (0.0007)	0.0055 (0.0020)	0.0012 (0.0006)
90	0.0009 (0.0004)	0.0027 (0.0012)	0.0009 (0.0004)
105	0.0017 (0.0007)	0.0011 (0.0007)	0.0018 (0.0011)
120	0.0024 (0.0010)	0.0046 (0.0027)	0.0004 (0.0001)
135	0.0047 (0.0017)	0.0004 (0.0001)	0.0015 (0.0008)
150	0.0265 (0.0144)	0.0154 (0.0087)	0.0218 (0.0119)
175	0.0018 (0.0012)	0.0001 (0.0001)	0.0014 (0.0008)
180	0.0022 (0.0009)	0.0068 (0.0032)	0.0052 (0.0018)
195	0.0037 (0.0019)	0.0034 (0.0014)	0.0019 (0.0007)
210	0.0047 (0.0021)	0.0017 (0.0008)	0.0038 (0.0023)
225	0.0034 (0.0014)	0.0023 (0.0011)	0.0005 (0.0002)
240	0.0025 (0.0009)	0.0013 (0.0005)	0.0002 (0.0001)
255	0.0021 (0.0013)	0.0020 (0.0008)	0.0018 (0.0007)
270	0.0024 (0.0009)	0.0046 (0.0023)	0.0020 (0.0013)
285	0.0072 (0.0026)	0.0009 (0.0006)	0.0038 (0.0014)
300	0.0034 (0.0016)	0.0008 (0.0005)	0.0006 (0.0003)
315	0.0112 (0.0041)	0.0177 (0.0076)	0.0067 (0.0027)
330	0.0055 (0.0019)	0.0016 (0.0011)	0.0008 (0.0004)
345	0.0043 (0.0028)	0.0057 (0.0020)	0.0056 (0.0039)
360	0.0027 (0.0015)	0.0013 (0.0005)	0.0008 (0.0003)

Tablica A.31: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego ϕ_{qt} w kanale (1,1). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0073 (0.0038)	0.0047 (0.0031)	0.0065 (0.0039)
30	0.0375 (0.0230)	0.0021 (0.0008)	0.0275 (0.0149)
45	0.0107 (0.0041)	0.0076 (0.0043)	0.0097 (0.0042)
60	0.0090 (0.0042)	0.0038 (0.0022)	0.0097 (0.0049)
75	0.0125 (0.0047)	0.0063 (0.0029)	0.0061 (0.0026)
90	0.0081 (0.0053)	0.0136 (0.0085)	0.0066 (0.0035)
105	0.0390 (0.0221)	0.0192 (0.0106)	0.0083 (0.0049)
120	0.0060 (0.0040)	0.0039 (0.0020)	0.0031 (0.0021)
135	0.0180 (0.0091)	0.0046 (0.0019)	0.0054 (0.0027)
150	0.0066 (0.0040)	0.0012 (0.0006)	0.0046 (0.0016)
175	0.0494 (0.0280)	0.0504 (0.0350)	0.0337 (0.0185)
180	0.0180 (0.0090)	0.0103 (0.0044)	0.0012 (0.0004)
195	0.0163 (0.0084)	0.0095 (0.0056)	0.0017 (0.0009)
210	0.0087 (0.0039)	0.0020 (0.0014)	0.0067 (0.0029)
225	0.0208 (0.0085)	0.0110 (0.0044)	0.0080 (0.0028)
240	0.0281 (0.0103)	0.0069 (0.0031)	0.0202 (0.0142)
255	0.0099 (0.0064)	0.0055 (0.0033)	0.0042 (0.0018)
270	0.0083 (0.0035)	0.0067 (0.0024)	0.0031 (0.0015)
285	0.0195 (0.0105)	0.0097 (0.0045)	0.0090 (0.0046)
300	0.1437 (0.0759)	0.0723 (0.0271)	0.0668 (0.0238)
315	0.0154 (0.0063)	0.0109 (0.0063)	0.0057 (0.0037)
330	0.0131 (0.0060)	0.0028 (0.0010)	0.0058 (0.0036)
345	0.0165 (0.0086)	0.0067 (0.0024)	0.0032 (0.0018)
360	0.0062 (0.0029)	0.0144 (0.0073)	0.0017 (0.0006)

Tablica A.32: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\phi_{q'}$ w kanale (1,3). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0178 (0.0113)	0.0430 (0.0201)	0.0246 (0.0135)
30	0.0862 (0.0449)	0.0329 (0.0147)	0.0292 (0.0129)
45	0.1273 (0.0644)	0.1908 (0.0647)	0.0228 (0.0084)
60	0.2056 (0.0923)	0.1296 (0.0650)	0.1063 (0.0436)
75	0.0856 (0.0374)	0.0345 (0.0189)	0.0167 (0.0058)
90	0.0336 (0.0176)	0.0118 (0.0042)	0.0053 (0.0029)
105	0.0266 (0.0098)	0.0171 (0.0112)	0.0134 (0.0087)
120	0.0517 (0.0330)	0.0150 (0.0069)	0.0213 (0.0126)
135	0.3141 (0.0917)	0.4802 (0.2673)	0.2820 (0.0699)
150	0.0581 (0.0404)	0.0305 (0.0104)	0.0209 (0.0122)
175	0.0431 (0.0176)	0.0315 (0.0132)	0.0179 (0.0117)
180	0.0327 (0.0114)	0.0218 (0.0102)	0.0157 (0.0057)
195	0.0416 (0.0157)	0.0334 (0.0146)	0.0359 (0.0141)
210	0.1038 (0.0540)	0.0521 (0.0300)	0.0537 (0.0371)
225	0.1107 (0.0463)	0.1827 (0.1020)	0.0484 (0.0179)
240	0.1446 (0.0750)	0.0733 (0.0431)	0.0833 (0.0310)
255	0.0612 (0.0254)	0.0513 (0.0306)	0.0333 (0.0136)
270	0.0246 (0.0097)	0.0170 (0.0069)	0.0064 (0.0026)
285	0.0471 (0.0226)	0.0100 (0.0067)	0.0308 (0.0116)
300	0.1270 (0.0404)	0.0260 (0.0100)	0.0257 (0.0130)
315	0.0270 (0.0128)	0.0249 (0.0101)	0.0299 (0.0106)
330	0.1549 (0.0826)	0.5445 (0.2917)	0.0671 (0.0303)
345	0.0311 (0.0125)	0.0048 (0.0019)	0.0106 (0.0045)
360	0.0370 (0.0236)	0.0182 (0.0090)	0.0148 (0.0069)

Tablica A.33: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego ϕ_{qt} w kanale (1,5). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
15	0.0057 (0.0035)	0.0017 (0.0006)	0.0021 (0.0008)
30	0.0013 (0.0005)	0.0007 (0.0003)	0.0002 (0.0001)
45	0.0025 (0.0016)	0.0017 (0.0010)	0.0006 (0.0002)
60	0.0018 (0.0006)	0.0037 (0.0015)	0.0018 (0.0009)
75	0.0019 (0.0007)	0.0054 (0.0019)	0.0012 (0.0005)
90	0.0011 (0.0004)	0.0021 (0.0008)	0.0008 (0.0003)
105	0.0018 (0.0007)	0.0010 (0.0006)	0.0018 (0.0009)
120	0.0053 (0.0036)	0.0104 (0.0066)	0.0007 (0.0003)
135	0.0037 (0.0013)	0.0007 (0.0003)	0.0010 (0.0006)
150	0.0064 (0.0036)	0.0035 (0.0018)	0.0049 (0.0023)
175	0.0021 (0.0010)	0.0001 (0.0001)	0.0014 (0.0008)
180	0.0037 (0.0014)	0.0090 (0.0041)	0.0054 (0.0019)
195	0.0042 (0.0018)	0.0036 (0.0016)	0.0019 (0.0007)
210	0.0038 (0.0014)	0.0012 (0.0005)	0.0031 (0.0020)
225	0.0031 (0.0012)	0.0014 (0.0006)	0.0002 (0.0001)
240	0.0023 (0.0009)	0.0013 (0.0009)	0.0003 (0.0002)
255	0.0024 (0.0009)	0.0016 (0.0010)	0.0013 (0.0005)
270	0.0023 (0.0009)	0.0048 (0.0024)	0.0020 (0.0013)
285	0.0120 (0.0065)	0.0013 (0.0007)	0.0080 (0.0029)
300	0.0036 (0.0017)	0.0006 (0.0004)	0.0003 (0.0002)
315	0.0027 (0.0014)	0.0060 (0.0025)	0.0021 (0.0008)
330	0.0043 (0.0018)	0.0016 (0.0008)	0.0006 (0.0004)
345	0.0069 (0.0047)	0.0080 (0.0028)	0.0086 (0.0055)
360	0.0023 (0.0012)	0.0010 (0.0004)	0.0007 (0.0003)

Tablica A.34: Tabela przedstawia zbieżność dla ustalonego $\phi_{q'}$ w kanale (6,6). W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Zbieżność w zależności od wartości pędu

Definicja zbieżności podana w rozdziale 3.2.1. Metodologia obliczeń opisana w rozdziale 4.2.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
0	9.44 (4.43)	7.70 (1.50)	4.21 (0.11)
0.5	4.52 (1.09)	3.98 (1.16)	5.50 (0.70)
1	7.53 (4.47)	4.41 (0.96)	4.70 (0.92)
1.5	4.45 (0.16)	5.56 (0.71)	4.81 (0.74)
2	6.64 (1.77)	5.22 (1.37)	10.96 (3.77)
2.5	4.27 (0.64)	6.61 (2.03)	4.02 (0.62)
3	7.08 (1.61)	7.66 (2.90)	3.38 (0.08)
3.5	6.20 (0.60)	5.31 (1.86)	3.92 (0.29)
4	6.36 (2.20)	5.47 (1.11)	6.54 (0.69)
4.5	6.54 (1.60)	7.68 (0.85)	5.86 (1.26)
5	7.61 (3.79)	4.41 (0.49)	5.59 (0.64)
5.5	11.94 (4.85)	5.77 (1.06)	6.23 (0.77)
6	4.50 (1.69)	5.12 (2.69)	5.84 (0.52)
6.5	4.49 (0.31)	3.52 (0.52)	6.39 (0.17)
7	5.79 (2.56)	14.79 (8.49)	4.74 (0.50)
7.5	3.73 (0.25)	16.77 (17.68)	10.80 (6.37)
8	5.39 (1.60)	3.35 (0.14)	8.58 (3.89)
8.5	6.57 (3.51)	31.00 (19.23)	9.80 (2.45)
9	5.48 (0.98)	7.54 (4.37)	5.68 (0.56)
9.5	16.65 (9.50)	7.34 (1.73)	4.83 (1.08)
10	3.78 (0.71)	4.18 (0.43)	6.33 (1.08)

Tablica A.35: Tabela przedstawia zbieżność globalną dla wartości odcięcia $\varepsilon = 10^{-10}$. W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
0	9.44 (4.43)	5.58 (0.62)	4.21 (0.11)
0.5	4.52 (1.09)	3.98 (1.16)	5.50 (0.70)
1	4.81 (0.63)	4.41 (0.96)	4.70 (0.92)
1.5	4.45 (0.16)	5.56 (0.71)	3.98 (0.30)
2	6.64 (1.77)	5.22 (1.37)	5.37 (1.02)
2.5	4.27 (0.64)	6.42 (1.94)	4.02 (0.62)
3	6.22 (1.75)	7.34 (2.44)	3.38 (0.08)
3.5	6.20 (0.60)	4.47 (0.74)	3.92 (0.29)
4	6.36 (2.20)	5.47 (1.11)	4.74 (0.87)
4.5	6.54 (1.60)	5.99 (1.17)	5.86 (1.26)
5	6.45 (2.16)	4.41 (0.49)	5.18 (0.36)
5.5	5.35 (0.17)	5.77 (1.06)	6.23 (0.77)
6	4.50 (1.69)	5.12 (2.69)	5.84 (0.52)
6.5	4.49 (0.31)	3.52 (0.52)	6.39 (0.17)
7	5.79 (2.56)	4.45 (0.54)	4.74 (0.50)
7.5	3.73 (0.25)	7.74 (4.92)	4.50 (0.65)
8	5.39 (1.60)	3.35 (0.14)	8.59 (3.90)
8.5	6.57 (3.51)	5.33 (2.15)	6.26 (1.89)
9	5.48 (0.98)	7.54 (4.37)	5.68 (0.56)
9.5	5.35 (0.39)	7.34 (1.73)	4.83 (1.08)
10	3.78 (0.71)	4.18 (0.43)	6.33 (1.08)

Tablica A.36: Tabela przedstawia zbieżność globalną dla wartości odcięcia $\varepsilon = 10^{-5}$. W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowa (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
0	1.80 (0.16)	1.64 (0.12)	1.60 (0.15)
0.5	1.77 (0.05)	1.54 (0.15)	1.52 (0.11)
1	1.81 (0.16)	1.62 (0.10)	1.51 (0.08)
1.5	1.66 (0.04)	1.57 (0.08)	1.52 (0.11)
2	1.79 (0.11)	1.64 (0.12)	1.46 (0.05)
2.5	1.62 (0.04)	1.83 (0.14)	1.59 (0.09)
3	1.86 (0.13)	1.66 (0.08)	1.49 (0.15)
3.5	1.87 (0.25)	1.77 (0.10)	1.43 (0.09)
4	1.75 (0.14)	1.57 (0.05)	1.41 (0.02)
4.5	1.89 (0.08)	1.67 (0.03)	1.55 (0.05)
5	1.90 (0.07)	1.45 (0.10)	1.51 (0.17)
5.5	1.85 (0.04)	1.73 (0.28)	1.74 (0.17)
6	1.56 (0.01)	1.69 (0.06)	1.51 (0.11)
6.5	1.82 (0.05)	1.64 (0.09)	1.54 (0.03)
7	1.80 (0.09)	1.72 (0.16)	1.52 (0.07)
7.5	1.86 (0.09)	1.64 (0.11)	1.63 (0.08)
8	1.98 (0.27)	1.68 (0.06)	1.54 (0.15)
8.5	1.76 (0.10)	1.77 (0.14)	1.57 (0.10)
9	1.83 (0.02)	1.67 (0.11)	1.44 (0.10)
9.5	1.95 (0.14)	1.73 (0.10)	1.62 (0.07)
10	1.75 (0.09)	1.63 (0.19)	1.41 (0.05)

Tablica A.37: Tabela przedstawia zbieżność globalna dla wartości odcięcia $\varepsilon = 10^{-2}$. W nawiasie podano odchylenie standardowe.

Miara kątowna (°)	$N = 10^6$	$N = 2 * 10^6$	$N = 4 * 10^6$
0	0.8809 (0.0840)	0.8576 (0.0519)	0.5624 (0.0617)
0.5	0.7628 (0.0829)	0.7623 (0.0770)	0.6613 (0.1182)
1	1.13 (0.09)	0.8392 (0.0845)	0.3142 (0.1066)
1.5	0.9099 (0.1184)	0.7069 (0.0450)	0.4756 (0.1312)
2	1.01 (0.17)	0.6381 (0.1556)	0.3684 (0.1220)
2.5	0.9870 (0.0998)	0.9189 (0.1147)	0.3461 (0.0261)
3	1.02 (0.12)	0.8389 (0.1671)	0.4356 (0.1566)
3.5	1.08 (0.08)	0.6383 (0.0379)	0.3862 (0.0749)
4	0.9546 (0.1146)	0.6699 (0.0889)	0.4248 (0.1116)
4.5	0.8516 (0.0961)	0.5700 (0.1224)	0.5503 (0.0275)
5	1.03 (0.25)	0.5682 (0.0848)	0.4519 (0.1104)
5.5	0.9428 (0.0536)	0.5799 (0.1454)	0.4607 (0.1353)
6	0.8222 (0.0303)	0.7879 (0.0777)	0.3488 (0.0649)
6.5	1.03 (0.09)	0.8263 (0.0790)	0.2408 (0.0865)
7	1.08 (0.16)	0.6348 (0.1531)	0.3174 (0.0735)
7.5	0.8128 (0.2227)	0.7557 (0.0653)	0.5318 (0.1497)
8	0.9459 (0.1242)	0.9031 (0.1104)	0.4739 (0.0413)
8.5	0.9854 (0.1040)	0.9326 (0.1757)	0.3551 (0.0803)
9	0.9633 (0.0331)	0.8654 (0.1184)	0.5912 (0.0481)
9.5	0.9078 (0.2578)	0.7824 (0.2040)	0.3978 (0.2057)
10	1.07 (0.18)	0.7722 (0.0821)	0.3768 (0.0657)

Tablica A.38: Tabela przedstawia zbieżność globalną dla wartości odcięcia $\varepsilon = 1$. W nawiasie podano odchylenie standardowe.